

管路系液体過渡解析ソフトウェア Advance/FrontNet/ Ω への

1 次元開水路流れの解析機能の導入検討

秋村 友香* 神長 龍一* 富塚 孝之* 三橋 利玄*

Examination of Introduction of One-dimensional Open Channel Flow Analysis Function to Pipeline Liquid Transient Analysis Software Advance/FrontNet/ Ω

Yuka Akimura*, Ryuichi Kaminaga*, Takayuki Tomizuka* and Toshiharu Mitsuhashi*

閉水路の水撃解析で実績のある管路系液体過渡解析ソフトウェア Advance/FrontNet/ Ω のオプション機能として、1 次元開水路解析機能の導入検討を行った。不連続面の扱いについて、気体の衝撃波管問題に実績がある管路系液体過渡解析ソフトウェア Advance/FrontNet/ Γ と同じ離散化方法を用いたが、同じ手法では振動が出てしまったため、運動量保存式の対流項の扱いに工夫をした。ダム崩壊問題や常流・射流が混在する流れに対するベンチマーク計算を行い、本手法の適用性を確認した。また、Advance/FrontNet/ Ω のパッケージ版へ開水路機能を正式に導入するための検討を行った。

Keywords: 開水路、河川、不等流、浅水流方程式、ダム崩壊問題、ドライベッド、ウェットベッド、射流、常流、管路系、1 次元流れ、1 次元風上差分法、スタガード格子、陽解法、防災、リスク検討、対策検討、Advance/FrontNet/ Ω 、Advance/FrontNet/ Γ

1. はじめに

近年、日本では豪雨による河川氾濫やそれに伴う様々なリスクが増えてきており、ダムの事前/緊急放流を行うかなどの対策検討が重要となっている。また、地震時のダムの部分的あるいは全面的決壊や、地下鉄、トンネルなどへの大規模出水など水害予防の観点からも、開水路の解析ニーズは高く、解析による防災対策の検討が有用であると考えられる[1][2][3][4]。1 次元解析は河川など、流れ方向の長さが支配的な系には良い近似であり、また、メリットは計算時間が短いことであるため、緊急時に短い時間内に防災検討を行うための計算や、時々刻々の測定値を用いた予測計算（リアルタイムシミュレータ）に適している[5]。

アドバンスソフト株式会社では、長年に渡り、

閉水路（満管状態）の水撃解析をターゲットとした管路系液体過渡解析ソフトウェア Advance/FrontNet/ Ω を開発してきた。冷却水や LNG などの液体を扱うプラントや、上下水道、農業用水路における水撃解析および水撃対策検討を本ソフトウェアで扱ってきたが、開水路を解析したいという声を度々聞くことがあった。

本稿の目的は、開水路を解析するための基本的な機能を開発し、解析精度や問題点、また、今後の発展性を確認し、Advance/FrontNet/ Ω の機能として今後正式に導入可能かどうかの見通しを立てることである。

ベンチマーク例題の選定としては、解析解または実測値があるものとして、(1) ダム崩壊問題（ウェットベッド）、(2) ダム崩壊問題（ドライベッド）、(3) 河川越流流れ（石狩川模型実験）の 3 つを採用した。ここで、ウェットベッドとは水深がある状態（ダム崩壊問題では、ダム崩壊後に流れ込む領域に薄い水膜が敷いてある状態）、ドライベッドとは水深がゼロの乾き状態（ダム崩壊問題では、

*アドバンスソフト株式会社 熱流動エンジニアリングセンター

Thermal Hydraulics Engineering Center, AdvanceSoft Corporation

ダム崩壊後に流れ込む領域に水のない状態)を言う。ダム崩壊問題(ウェットベッド)のベンチマークでは、段波(不連続面)の伝播の解析精度を確認する。ダム崩壊問題(ドライベッド)のベンチマークでは、水深がゼロの場合の取り扱いと解析精度について確認する。河川越流流れ(石狩川模型実験)では、常流と射流が混在する場合の解析精度を確認する。

数値解法の選定にあたって、まず初めに、Advance/FrontNet/Ω の閉水路の数値解法と同じ特性曲線法を用いた数値解法[6][7]を検討した。しかし、特に勾配のある流れに対し質量保存性の悪いこと[7]や、射流と常流の混在する流れに不向きであること[8]から、特性曲線法は採用しないこととした。

本稿で報告するのは、時間発展法として Euler 予測子修正子法(陽解法)、対流項の差分法として一次風上差分法を採用したスキームである。本スキームを採用した理由としては、開発期間が比較的短くて済むこと、射流と常流の混在する流れに適用できること[9][10]、アドバンスソフト株式会社で開発を進めるガス管路系の過渡解析ソフトウェア Advance/FrontNet/Γ においてガスに対する衝撃波の解析実績があることが挙げられる。将来的に計算速度の高速化が必要になった場合は拙著[11]と同様の陰解法を採用することが考えられるが、基本機能の確認が目的であることから、本稿ではこれは行わないこととした。

2 章では基礎式と関連する式についてまとめる。3 章では 3 つの事例に対する解析精度について報告する。4 章には Advance/FrontNet/Ω に開水路機能を正式に導入するためのタイムステップに関する検討を、5 章には今後の課題をまとめる。

2. 1 次元開水路流れの解析機能の開発

2.1. 基礎式と関連式

2.1.1. 基礎方程式

基礎方程式は、質量保存式と運動量保存式の 2 本とする。

質量保存式

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Au}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

運動量保存式

$$\begin{aligned} \frac{\partial Au}{\partial t} + \frac{\partial Auu}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial Ah}{\partial x} \\ + fA \frac{u|u|}{2R} + gA \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

A は流路断面積[m²]、 u は流速[m/s]、 h は水深[m]、 f は管摩擦係数[-]、 R は径深[m]、 g は重力加速度[m/s²]、 θ は流路の傾き[rad]である。

$$\sin \theta = \frac{dz}{dx} \quad (3)$$

ここで、 z は河床高さ[m]、 x と θ の定義は図 1 を参照のこと。流路形状が矩形の場合、流路幅を W [m] とすれば流路断面積は以下で表される。

$$A = Wh \cos \theta \quad (4)$$

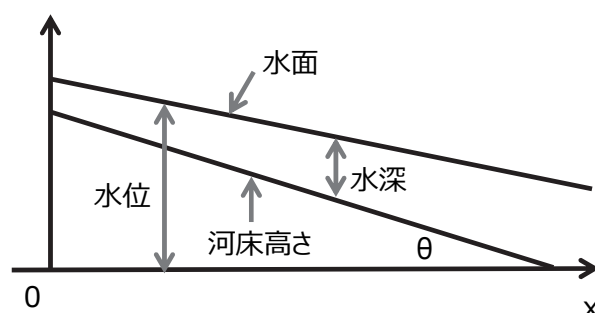


図 1 座標 x と θ の定義

2.1.2. 摩擦抵抗係数

潤辺 S [m] とは、水路断面において水が周囲の壁・底と接している部分の長さの合計値(濡れ縁長さ)を指し、矩形の場合、以下で表される。

$$S = 2h \cos \theta + W = \frac{2A}{W} + W \quad (5)$$

径深とは水力半径のことで矩形の場合、以下で表される。

$$R = \frac{A}{S} = \frac{AW}{2A + W^2} \quad (6)$$

管摩擦係数は Manning の式が河川の分野で一般的に用いられている。

$$f = \frac{2gn^2}{R^{1/3}} \quad (7)$$

ここで、 n は Manning の粗度係数 [$\text{m}^{-1/3} \cdot \text{s}$] で、通常、 $0.1 \sim 0.018$ の値をとる[12]。摩擦損失水頭 $\Delta H[\text{m}]$ は以下で表される。

$$\Delta H = f \frac{L}{R} \frac{u^2}{2g} = \frac{n^2 L}{R^{4/3}} u^2 \quad (8)$$

2.1.3. 重力波の伝播速度

重力波の伝播速度 $c[\text{m/s}]$ は矩形の場合、以下の式で与えられる。

$$c = \sqrt{gA/W} \quad (9)$$

流速が重力波の伝播速度より小さいときは常流、伝播速度に等しいときは限界流、伝播速度より大きいときは射流と呼ばれる。

常流 : $u < c$

限界流 : $u = c$ (10)

射流 : $u > c$

射流とは、下流側の水位変化や波が上流に伝わらない状態のことで、勾配のある流れで起こる。

陽解法のタイムステップは CFL 条件[13]により以下のように制限される。

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > u + c, C_{CFL} \equiv (u + c) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (11)$$

ここで、 C_{CFL} は Courant 数である。例えば、幅 1m、水深 1m のとき、重力波の伝播速度は $c=3.1\text{m/s}$ 、水深を 10m としても $c=9.9\text{m/s}$ である。閉水路の液体過渡解析の場合、タイムステップは圧力波伝播速度（音速）によって制限され、圧力波伝播速度が 1000m/s 程度のためタイムステップを大きくとることはできないが、重力波の伝播速度はこれに比べて二桁小さいため、タイムステップを大きくとることができ、開水路の計算時間は閉水路に比べて速くなる。

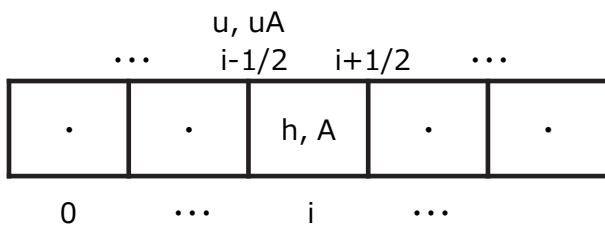


図 2 スタガード格子の物理量の定義点

2.2. 離散式

格子界面に流速と流量、格子中心に流路断面積と水深を定義するスタガード格子上で方程式を離散化する。基本変数は流路断面積 A と体積流量 $Q=Au$ とした。図 2 にスタガード格子の定義をまとめる。ここで、 i は格子中心番号、 $i+1/2$ は格子界面番号である。

2.2.1. 質量保存式

(1) 時間発展

時間発展法は Euler 法とした。ただし、予測子によって近似計算を行い、修正子によりその近似値を修正する予測子修正子法とした。

質量保存式をタイムステップ n と $n+1$ について離散化すると

$$\frac{A^{n+1} - A^n}{\Delta t} + \left(\frac{\partial(Au)}{\partial x} \right)^n = 0 \quad (12)$$

Euler 予測子修正子法では、次のような計算を行う。

$$\text{予測子} \quad \tilde{A}^{n+1} = A^n - \left(\frac{\partial(Au)}{\partial x} \right)^n \Delta t \quad (13)$$

$$\text{修正子} \quad A^{n+1} = A^n - \left(\frac{\partial(\tilde{A}\tilde{u})}{\partial x} \right)^{n+1} \Delta t \quad (14)$$

(2) 対流項

1 次風上差分法とした。1 次風上差分法とは、流速の向きに従い、風上側の物理量を選択する差分法である。

$$\left(\frac{\partial Au}{\partial x} \right)_i = \frac{\langle A \rangle_{i+1/2} u_{i+1/2} - \langle A \rangle_{i-1/2} u_{i-1/2}}{\Delta x_i} \quad (15)$$

$$\langle A \rangle_{i+1/2} = \begin{cases} A_i (u_{i+1/2} \geq 0) \\ A_{i+1} (u_{i+1/2} < 0) \end{cases} \quad (16)$$

$$\langle A \rangle_{i-1/2} = \begin{cases} A_{i-1} (u_{i-1/2} \geq 0) \\ A_i (u_{i-1/2} < 0) \end{cases}$$

2.2.2. 運動量保存式

(1) 時間発展

基本的には質量保存式と同様だが、計算の安定化を図るため、摩擦項と重力項を陰的に扱う[14]。

摩擦項については、まず流路断面積を陽に見えるように式変形する。

$$fA \frac{u|u|}{2R} = gn^2 (2A + W^2)^{4/3} \frac{(Au)|Au|}{A(AW)^{4/3}} \quad (17)$$

そして、時間に関し、以下のように線形化する。

$$\begin{aligned} (2A + W^2)^{4/3} \frac{Au|Au|}{A(AW)^{4/3}} \\ \cong \frac{(2A^{n+1} + W^2)^{4/3}}{A^{n+1}(A^{n+1}W)^{4/3}} \\ \times \left(2(Au)^{n+1} - (Au)^n \right) |(Au)^n| \end{aligned} \quad (18)$$

重力項は以下のように離散化する。

$$gA \sin \theta = \frac{g(Au)^{n+1} \sin \theta}{u^n} \quad (19)$$

(2) 対流項

基本的には質量保存式と同様だが、後に示すように、ダム崩壊問題（ウェットベッド）で不連続面に振動が起こる問題を回避するために以下のように工夫した。

$$\left(\frac{\partial Au u}{\partial x} \right)_{i+1/2} = \frac{\langle u \rangle_{i+1} \langle Au \rangle_{i+1} - \langle u \rangle_i \langle Au \rangle_i}{\Delta x_{i+1/2}} \quad (20)$$

ここで、 $\langle Au \rangle_i$ は格子番号 i の中心に定義された流量 Au の平均量である。

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_{i+1} &= \begin{cases} u_{i+1/2} & (\langle Au \rangle_{i+1} \geq 0) \\ u_{i+3/2} & (\langle Au \rangle_{i+1} < 0) \end{cases} \\ \langle u \rangle_i &= \begin{cases} u_{i-1/2} & (\langle Au \rangle_i \geq 0) \\ u_{i+1/2} & (\langle Au \rangle_i < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

Au の平均量 $\langle Au \rangle_i$ は以下のような値を採用した。流れが常流のとき、上流と下流の加算平均をとる。

$$\langle Au \rangle_i = \frac{(Au)_{i-1/2} + (Au)_{i+1/2}}{2} \quad (22)$$

流れが射流のとき、風上値をとる。

$$\langle Au \rangle_i = \begin{cases} (Au)_{i-1/2} & 0 < u_i \\ (Au)_{i+1/2} & u_i \leq 0 \end{cases} \quad (23)$$

2.3. ドライベッドモデル

基礎方程式(1)(2)において、水がない場合は水深と流路断面積がゼロとなり計算不能となる。そのため、水がない場合の取り扱いをドライベッドモデルと呼び、文献[10]を参考に次の条件を課した。①格子中心点において、水深の閾値 ε [m]を設定し、水深が ε 以下だと水深を ε に固定し、そこを“ドライベッド”とし、流路断面積をそれに応じた値にする。

$$h = \max(h, \varepsilon) \quad (24)$$

$$A = \max(A, W \varepsilon \cos \theta) \quad (25)$$

②格子界面点において、両隣の格子中心が“ドライベッド”であればその格子界面も“ドライベッド”とし、その点の流量および流速をゼロとする。

$$Q = uA = 0 \quad (26)$$

$$u = 0 \quad (27)$$

3. 解析事例

3.1. ダム崩壊問題（ウェットベッド）

ダム内に一定の水深があり、ダムの堤防が瞬時に崩壊したときの問題はダム崩壊問題と呼ばれる。ダムの下流側に水深がある場合（ウェットベッドの場合）は、Stoker[15]により解析解が導かれている[1][16]。ドライベッドの場合は水深と流路断面積がゼロとなり、方程式が解けないため対策が必要であるが、ウェットベッドの場合は方程式をそのまま解けばよいので、まずはウェットベッドの場合について計算を実施し、Stoker の解析解と比較した。

計算条件は Courant 数 0.7、格子の基本長さを 0.1m、全域で河幅を 1m、Manning の粗度係数を 0 とし、初期水深をダム内 0.5m、ダム下流側 0.01m とし 10s まで過渡解析を行った。

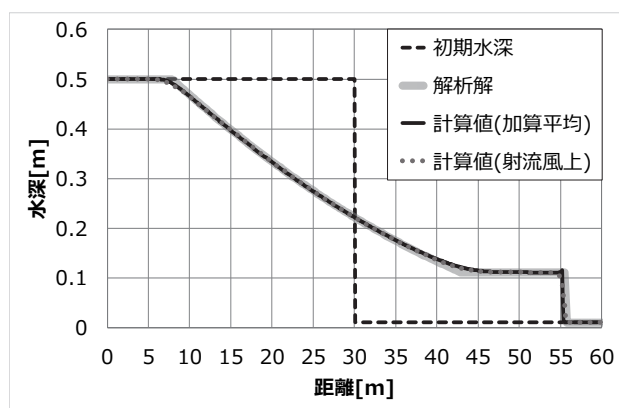


図 3 水深分布（計算値と解析解の比較）

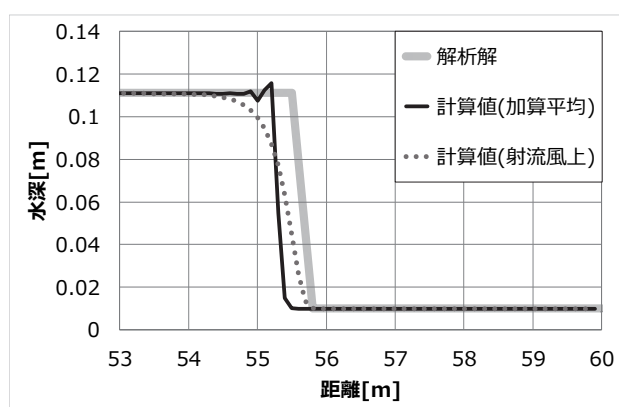


図 4 水深分布（拡大図）

図 3 は時刻 10s の水深分布である。初期水深が黒の点線、解析解が薄い灰色の実線で示してある。黒の実線は運動量保存式の対流項の流量 $\langle Au \rangle$ の格子平均値を加算平均とした場合、灰色の点線は流量 $\langle Au \rangle$ の格子平均値について常流の場合に加算平均、射流の場合に風上値とした場合の計算値を示している。

図 4 に距離 55m 付近の水深の拡大図を示す。流量 $\langle Au \rangle$ の格子平均値を加算平均とした場合は距離が 55m 付近の不連続面で振動が出ているが、射流の場合に風上値とした場合は振動が抑えられていることが分かる。

不連続面近傍の振動については、例えば文献[17]において 1 次風上差分法で同様の振動を示している。文献[9]では、不連続面を扱う上で、気体と開水路の方程式を比較し、開水路での非物理的な振動の除去法について提案している。本稿における流量 $\langle Au \rangle$ の格子平均値の扱いは文献[9]にお

ける「射流の場合は特性速度が上流から伝播し、常流の場合は上下流から伝播する」という扱いからの類推である。

本手法を用いることにより、数値振動を抑えることができ、計算安定性についても問題ないこと、かつ、解析解をよく再現できることが確認できた。

3.2. ダム崩壊問題（ドライベッド）

ダムの下流側に水深がない場合（ドライベッドの場合）は、Ritter[18]により解析解が導かれている[16]。ドライベッドモデルを使った計算を実施し、Ritter の解析解と比較した。

計算条件は Courant 数 0.3、格子の基本長さを 0.1m、全域で河幅を 1m、Manning の粗度係数を 0 とし、初期水深をダム内 0.5m、ダム下流側 0m とし 10s まで過渡解析を行った。ドライベッドモデルの水深の閾値 ε を 10^{-3}m 、 10^{-6}m 、 10^{-10}m の 3 パターンとした。

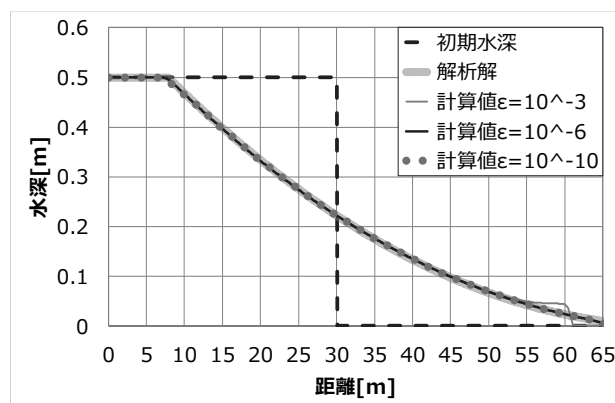


図 5 水深分布（計算値と解析解の比較）

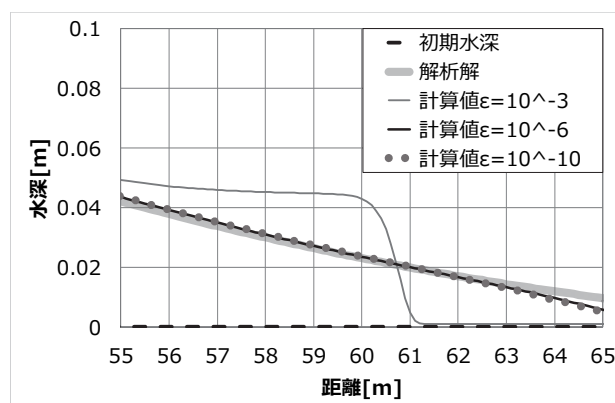


図 6 水深分布（拡大図）

図 5 は時刻 10s の水深分布である。初期水深が黒の点線、解析解が薄い灰色の太い実線で示してある。ドライベッドモデルの水深の閾値 ε が 10^{-3}m の場合を細い灰色の実線で、 10^{-6}m の場合を細い黒の実線で、 10^{-10}m の場合を灰色の点線で示している。

全体的に解析解に近い結果が得られたが、閾値が 10^{-3}m の場合は距離 60m 付近で段波のようなものが見られた。図 6 は水際付近を拡大した図であるが、ドライベッドモデルの水深の閾値 ε が 10^{-6}m と 10^{-10}m ではほぼ等しい結果が得られていることが分かる。

3.3. 河川越流流れ（石狩川模型実験）

西本[9]や崇田ら[19][20]と同様に、石狩川遊水地越流部模型実験[21]の条件で計算を実施した。

計算条件は Courant 数 0.3、格子の基本長さを 0.5m、全域で河幅を 1m、Manning の粗度係数を 0.01 とし、十分定常になるまで過渡解析を行った。境界条件は上流側を流量指定条件 ($0.07971\text{m}^3/\text{s}$)、下流側を水深指定条件 (0.2m) とした。

図 7 は水位分布である。計算値が実測値をよく再現している。距離 3.5m 付近で常流から射流に、距離 7.7m 付近で射流から常流に遷移した。射流/常流間の遷移を問題なく計算でき、解析解をよく再現できることを確認できた。図 8 は流速分布である。水深と河床高さに応じて変化していることが分かる。文献[9]のフルード数と比較してほぼ同様の傾向となっている。

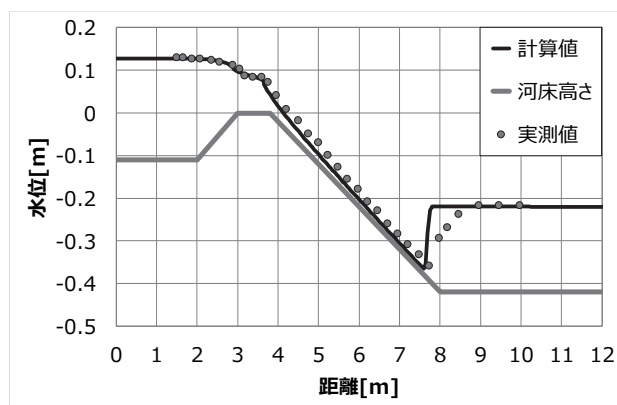


図 7 水位分布（計算値と測定値の比較）

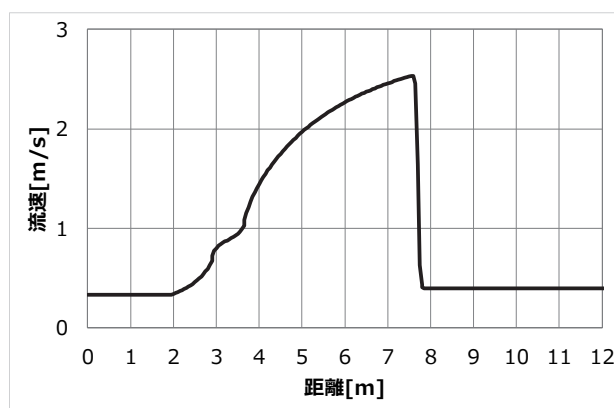


図 8 流速分布（計算値）

4. Advance/FrontNet/Ω への導入について

開水路に対する流路要素（閉水路では配管要素）の接続関係は、Advance/FrontNet/Ω の既存機能と同様に、流路要素とノードを自由に接続できるようなプログラム構造とし、流路要素に対してはフラグ 1 つで閉水路を解くか、開水路を解くかを入力指定できるようにした（図 9）。

ノード点に対して開水路と閉水路を接続する計算モデルを開発すれば、開水路から閉水路へ、またはその逆の解析も可能となる。なお、Advance/FrontNet/Ω の閉水路の流体機器として堰モデル（一次水槽から二次水槽へ越流するモデル）が実装されているため、このような機器モデルとの接続も可能と考えられる。

開水路と閉水路が同時に存在する場合、2.1.3 節での考察より、タイムステップのオーダーが異なる。以下に、このような場合の計算の高速化について検討をまとめる。

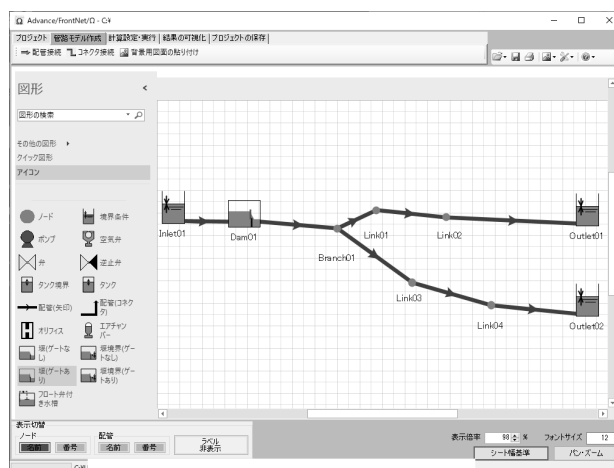


図 9 Advance/FrontNet/Ω による接続関係の例

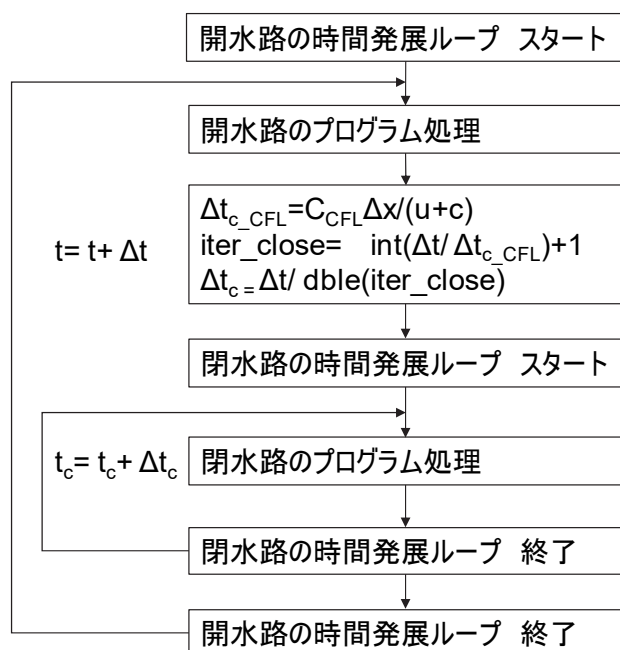


図 10 時間発展の内部ループのイメージ

例えば、Courant 数を 0.7、格子サイズを $\Delta x=10\text{m}$ 、流速 1m/s 、閉水路における圧力波伝播速度を 1000m/s 、開水路における重力波の伝播速度を 10m/s とする。このとき、閉水路におけるタイムステップ Δt_c と開水路におけるタイムステップ Δt は以下の数値となる。

$$\Delta t_c = 0.7 \frac{10}{1000+1} \cong 0.007 \quad (28)$$

$$\Delta t = 0.7 \frac{10}{10+1} \cong 0.64 \quad (29)$$

このとき、閉水路のタイムステップを内部ループとして進めるような工夫をすることにより、計算を効率的に進めることができると考えられる。図 10 に開水路と閉水路を解く流路が混在する場合の時間発展のプログラム処理のイメージをまとめた。ここで、閉水路に対するタイムステップは、CFL 条件を満たし、かつ、開水路のタイムステップの整数分の一であるとし、内部ループとして扱う。

5. まとめ

閉水路の水撃解析を目的に開発された管路系液体過渡解析ソフトウェア Advance/FrontNet/Ω のオプション機能として、開水路流れの解析機能を

開発し、その適用性を調べた。開水路流れに対する基礎方程式は保存形とし、水路の断面は矩形、管摩擦は Manning の式を想定した。開水路流れに対する格子スキームはスタガード格子とし、水深と流路断面積を格子中心、流速と流量を格子界面に定義した。時間発展スキームは Euler 陽解法（予測子修正子法）とした。対流項の差分スキームは、1 次風上差分法としたが、運動量保存式の対流項における、格子中心に対する流量の平均値について、常流の場合は格子の両端の界面値の加算平均とし、射流の場合は風上の値を採用することにより、ダム崩壊問題（ウェットベッド）の解析解や射流と常流が混在する河川流れの測定値をよく再現し、不連続面付近における振動も除去することができた。水のない状態を解析するために、ドライベッドモデルを導入し、ダム崩壊問題のドライベッド条件の解析解をよく再現した。以上により、開水路流れを解析する上で必要な機能の精度を確認することができた。

現在の機能は、以下の点で汎用性が足りないため、今後の検討課題である。

- ・流路断面を矩形とした（円形や台形への対応）
- ・分岐や合流に対応していないこと
- ・段波界面をよりシャープに捉える工夫が必要
- ・物理モデルとの連成計算
- ・開水路から閉水路への遷移の計算

ここで、物理モデルとの連成計算とは、例えば、砂利がどこまで運ばれるかなどのパッシブスカラー計算モデルや河床変動モデルとの連成計算が挙げられる。また、開水路から閉水路への遷移の計算とは、1 つの配管において、ある時刻は水面があり（開水路）、徐々に満管（閉水路）になるような計算を指している。例えば下水道管路系のマンホールを含む流路などが挙げられる。これに関しては、Priessmann–Cunge–Wegner モデル[22]の導入などが考えられる。

今後の展開としては、社会的に解析ニーズのある機能を要望に応じて導入していきたい。対象分野としては、河川、下水道、プラントの取水系などが考えられる。読者からの情報やコメントも参考としたい。

参考文献

- [1] 丸井信雄、安川浩、新井邦夫、宇井正和、
Dam Break Wave と管渠内段波、総合都市研究、第 14 号、1981.
- [2] 丸井信雄、安川浩、宇井正和、ダム・堤防
の決壊及び物体の落下に伴う波に関する予
備的考察、総合都市研究、第 8 号、1979.
- [3] 丸井信雄、安川浩、宇井正和、破堤によっ
てはらんする流水の挙動、総合都市研究、
第 11 号、1980.
- [4] 福島祐介、複雑な境界条件を持つ開水路一
次元不定流の基礎方程式について、長岡技
術科学大学、研究報告、第 21 号、1999.
- [5] 秋村友香、大須賀直子、清水雅嗣、三浦真
太郎、ダイナミックプロセスシミュレータ
と管路系流体過渡解析（第 2 報）、アドバ
ンスシミュレーション Vol.24, 2017.7, アドバ
ンスソフト出版事業部.
- [6] 小池秀耀、三橋利玄、浜野明千宏、富士総
合研究所編、管路内の流れのシミュレーシ
ョンプログラム、丸善株式会社
- [7] V. L. Streeter and E. B. Wylie, Fluid Transients,
McGraw-Hill Inc. (1978)
- [8] 井上和也、「開水路非定常流の数値解法とそ
の水工学への応用に関する研究」、京都大学
学位論文、1986.
- [9] 西本直史、森明臣、板倉忠興、金沢克己、
「FDS 法による 1 次元開水路流れの数値解
析」、土木学会論文集 No.670/II 54, 25-36,
2001.2.
- [10] 楊宏選、陸旻皎、熊倉俊郎、「浅水流方程式
の先端の扱いに関する研究」、土木学会論文
集 B1 (水工学), Vol.72, No.4, I_325-I_330,
2016.
- [11] 秋村友香、大須賀直子、三橋利玄、管路系
流体解析ソフトウェアへの陰解法導入によ
る計算効率の向上性検討、アドバンスシ
ミュレーション Vol.24, 2017.7, アドバンスソ
フト出版事業部.
- [12] 水理公式集、土木学会、平成 11 年版.
- [13] 棚橋隆彦、「はじめての CFD—移流拡散方程
式—」、コロナ社
- [14] スハス V. パタンカー原著、水谷幸夫・香
月正司共訳、「コンピュータによる熱移動と
流れの数値解析」、森北出版株式会社
- [15] Stoker, J. J, Water Waves, Interscience
Publishers Inc., New York, pp.333-341, 1957.
- [16] 松富英夫、下流側水深を有するダム破壊問
題における抵抗の効果、第 25 回水理後援会
論文集、1981 年 2 月.
- [17] 中山恵介、佐藤圭洋、堀川康志、CIP 法を
用いた浅水流方程式の数値計算手法の開発、
水工学論文集、第 42 巻、pp.1159-1164, 1998.
- [18] Ritter. A, Die Fortpflanzung der Wasserwellen,
Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure
(Berlin), Vol. 36, pt.2, No.33, pp.947-954,
1892.
- [19] 崇田徳彦、清水康行、渡邊康玄、MacCormak
法を用いた常・射流計算、北海道開発局開
発土木研究所月報、No.448, pp.23-32, 1974.
- [20] 渡邊康玄、許士達広、村上泰啓、崇田徳彦、
常流・射流混在場での不等流計算と河床変
動計算、開発土木研究所月報、No 436, 1989
年 9 月.
- [21] 北海道開発局開発土木研究所：石狩川遊水
地越流部模型実験業務報告書、1989.
- [22] C. C. S. Song et al, Transient Mixed-Flow
Models for Storm Sewers, J. Hyd. Eng. (1983),
p1487.

※ 技術情報誌アドバンスシミュレーションは、
アドバンスソフト株式会社 ホームページのシ
ミュレーション図書館から、PDF ファイル（カ
ラー版）がダウンロードできます。（ダウンロ
ードしていただくには、アドバンス/シミュレ
ーションフォーラム会員登録が必要です。）