

構造解析ソフトウェア Advance/FrontSTRへのコンクリート構成式の導入

袁 熙*

Implementation of Maekawa concrete constitutive model in Advance/FrontSTR

Xi YUAN*

本論文は前川ら[1]によって提案されたコンクリート用弾塑性損傷構成則を有限要素法解析ソフトウェアへの実装方法を検討する。本実装では、接線または割線弾性損傷剛性マトリクスと接線弾塑性剛性マトリクスを採用され、応力積分計算ではリターンマッピング法を用いた陰的応力積分アルゴリズムを提唱した。また、提案した手法は汎用有限要素解析ソフトウェア Advance/FrontSTR に実装し、三軸圧縮状態下のコンクリート円柱の変形解析を行った。有限要素法による解析結果と理論解や文献[1]に示した実験結果と比べ、上記実装の有効性を検証した。

Key word: コンクリート構成式、有限要素法

1. はじめに

前川構成式[1]は少ない材料変数を用い、コンクリートの複雑な非線形挙動を広い範囲で精度よく表すことに評価を受けた構成式である。しかし、この構成式の 3D 有限要素法に実装するための有限要素定式化やアルゴリズム設計などに関する文献がほとんど見られないため、本論文はこれらの実装方法を検討するのは目的である。

本論文で得られた成果は以下である：

- ・弾塑性損傷接線構成式の誘導。ここで得られた弾塑性損傷構成式が応力増分とひずみ増分関係を陽的表現でき、文献[1]に示した逆テンソル計算が必要ない。
- ・上記得られた弾塑性損傷接線マトリクスが非対称、不定であるため、対称、正定な割線構成式を提案した。
- ・リターンマッピング応力積分法の導入。リターンマッピング応力積分法は応力を材料の塑性降伏面に引き戻す計算手法であり、有限要素法弾塑性解析によく使われている。しかし、文献[1]では降伏関数を定義していない。本研究では、

前川構成式を整理した上、降伏関数を定義し、リターンマッピングの定式化を行い、その実装方法を検討した。

本論文は以下のように構成される。第 2 章において前川らのコンクリート構成式を整理し、有限要素法へ実装するため構成式の定式化を行い、リターンマッピング応力積分法を導入する。第 3 章では、三軸圧縮条件下のコンクリート円柱の変形解析を行い、その有限要素法による解析結果を理論解と比較し、本実装の有効性を検証する。

本論文では、ベクトルやテンソルは太字、テンソルの縮約は $\cdot$ 、テンソル積は $\otimes$ を使って表す。

2. 弾塑性損傷剛性マトリクスの誘導とリターンマッピングの定式化

2.1. 弾性損傷構成式

本論文は文献[1]に提案された分布ひび割れモデルを採用する。このモデルは等方損傷モデルであり、材料の損傷程度はスカラー損傷係数により表す。この時、材料の弾性係数 C は損傷係数 ω の関数となり、コンクリート内の応力 σ は以下のように弾性ひずみ ε^e 、損傷係数 ω と弾性マトリクス C により表す。

$$\sigma = C(\omega) : \varepsilon^e \quad (1)$$

*アドバンスソフト株式会社 第 1 事業部

1st Computational Science and Engineering Group,
AdvanceSoft Corporation

さらに、前川モデルは変形材の体積応力が損傷の影響を受けないと仮定し、上記弾性マトリクスは以下である。

$$\mathbf{C}(\omega) = \mathbf{KJ} \otimes \mathbf{J} + 2\omega G_0 \left(\mathbf{I}_{\text{sym}} - \frac{1}{3} \mathbf{J} \otimes \mathbf{J} \right) \quad (2)$$

ここでは、 $\mathbf{J}$ は二階恒等テンソル、 $\mathbf{I}_{\text{sym}}$ は四階対称恒等テンソル、 $\mathbf{K}$ と G_0 は体積弾性率と初期せん断弾性率を示している。

前川モデルでは、損傷係数 ω は下記のような損傷進展関数 F の関数である。

$$\begin{aligned} \omega &= \exp \left[-\frac{F}{a} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{F}{b} \right) \right\} \right] \\ F &= \left(\frac{\sqrt{2} J_{2e}}{0.23 \varepsilon_0 + \sqrt{3} |I_{1e}|} \right) \left(\frac{6 + \cos 3\theta}{5} \right) \\ \varepsilon_0 &= 1.6(1 + \nu_0) \frac{f_c}{E_0}; \cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{J_{3e}}{J_{2e}} \right)^3 \end{aligned} \quad (3)$$

ここでは、 θ は Lode 角を示しているが、 a と b は材料定数、 f_c はコンクリート材の圧縮強度、 E_0 と ν_0 はそれぞれコンクリート材の初期ヤング率と初期ポアソン比を示している。ただし、損傷進展関数 F は下記のように損傷進展閾値 F_c (F_c の初期値がゼロ) から損傷ポテンシャル関数 g を構築し、損傷ポテンシャル関数 g は KKT 条件 $g \leq 0; \dot{F}_c \geq 0; \dot{F}_c g = 0$ を満足する必要がある。

$$g = F - F_c \quad (4)$$

式(1),(2)から損傷弾性構成式の増分形式が得られる：

$$d\sigma = \mathbf{C}(\omega) : d\boldsymbol{\varepsilon}^e + 2G_0 \left(\mathbf{I}_{\text{sym}} - \frac{1}{3} \mathbf{J} \otimes \mathbf{J} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}^e d\omega \quad (5)$$

ここで

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{d\omega}{dF} dF = \frac{d\omega}{dF} \left(\frac{\partial F}{\partial J_{2e}} \frac{\partial J_{2e}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} + \frac{\partial F}{\partial |I_{1e}|} \frac{\partial |I_{1e}|}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F}{\partial J_{3e}} \frac{\partial J_{3e}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : d\boldsymbol{\varepsilon}^e \end{aligned} \quad (6)$$

であるため、式(5)は下記のように書き換えられる。

$$d\sigma = \mathbf{C}' d\boldsymbol{\varepsilon}^e$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{C} + 2G_0 \left(\mathbf{I}_{\text{sym}} - \frac{1}{3} \mathbf{J} \otimes \mathbf{J} \right) : \{ \mathbf{d} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^e \} \quad (7)$$

$$\mathbf{d} = \frac{d\omega}{dF} \left(\frac{\partial F}{\partial J_{2e}} \frac{\partial J_{2e}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} + \frac{\partial F}{\partial |I_{1e}|} \frac{\partial |I_{1e}|}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} + \frac{\partial F}{\partial J_{3e}} \frac{\partial J_{3e}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right)$$

テンソル $\mathbf{d}$ の右辺の項は順番に偏差ひずみ、体積

ひずみ、およびひずみの方向の影響を示している。これらの影響より得られた損傷弾性構成式 $\mathbf{C}'$ は非対称、非正定である。しかし、体積ひずみ、およびひずみの方向の影響を無視し、式(6)右辺の第一項のみを考慮する時弾性マトリクスは式(8)の $\mathbf{C}''$ となり、対称になる。また、損傷係数 ω の変化を完全に無視する時、損傷弾性構成式はテンソル $\mathbf{C}$ となり、対称正定である。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'' &= \mathbf{C} + G_0 \frac{1}{J_{2e}} \frac{\partial F}{\partial J_{2e}} \left(\mathbf{I}_{\text{sym}} - \frac{1}{3} \mathbf{J} \otimes \mathbf{J} \right) : \{ \boldsymbol{\varepsilon}^e \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^e \} \\ \frac{\partial F}{\partial J_{2e}} &= \frac{\sqrt{2}}{0.23 \varepsilon_0 + \sqrt{3} |I_{1e}|} \left(\frac{6 - 2 \cos 3\theta}{5} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

上記で得られた構成式 $\mathbf{C}, \mathbf{C}', \mathbf{C}''$ は有限要素解析ソフトウェアに実装すると、それぞれのメリットとデメリットがある。 $\mathbf{C}'$ を利用する場合では、得られる有限要素剛性マトリクスは接線剛性マトリクスとなり、この接線剛性マトリクスは損傷の変化から由来する材料非線形を考慮したため、有限要素法計算の収束性がよい。しかし、この接線剛性マトリクスは非正定、非対称であるため、CG法のような反復法線形方程式ソルバーの収束性が悪い。一方、構成式 $\mathbf{C}$ を採用する場合では、反復法線形方程式ソルバーの収束性がよいが、有限要素法非線形計算の収束性が悪くなる。

2.2. 塑性構成式

前川らが考案した塑性構成式は一般的な降伏関数概念を使用しない特別な手法により導入した。具体的には以下の式から構築した：

1) ひずみの弾性・塑性加算分解

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (9)$$

2) 塑性ひずみの偏差成分不変量と弾性ひずみの偏差成分不変量の関係式

$$J_2^p = \frac{9}{10} \beta \varepsilon_0 \left(\frac{J_2^e}{\varepsilon_0} \right)^3 \quad (10)$$

ここでは、 β は荷重速度を考慮するための修正変数である。

3) 塑性ひずみの体積成分不変量と塑性ひずみの偏差成分不変量の関係式

$$dI_1^p = D dJ_2^p \quad (11)$$

ここでの D はコンクリート材質を表す関数であ

り、以下のように定義されている：

$$D = D'P$$

$$D' = \begin{cases} D_0 & \omega \geq 0.5 \\ 4D_0\omega^2 + D_1(1 - 4\omega^2) & \omega < 0.5 \end{cases} \quad (12)$$

$$D_1 = \frac{\sqrt{2}I_1^e + 0.38\varepsilon_0}{0.28\varepsilon_0}, \quad D_0 = \frac{2\nu_0 - 1}{\sqrt{3}(1 + \nu_0)}$$

また、 P は応力状態を表す関数 $X = \sqrt{3}I_1/J_2^1$ の関数である。

$$P = -0.5 \sin\left(X \frac{\pi}{2}\right) + 0.5 \quad (-1 \leq X < 1) \quad (13)$$

$$P = 1 \quad (X \leq -1)$$

$$P = 0 \quad (X \geq 1)$$

4) 塑性ひずみの偏差成分と弾性ひずみの偏差成分の関係式

$$d\mathbf{e}^p = d\mathbf{g}\mathbf{e}^e \quad (14)$$

この式は偏差塑性ひずみ増分の方向が弾性ひずみ方向であることを示しており、 $d\mathbf{g}$ はその大きさを示す未定係数である。

2.3. 弾塑性損傷構成式

式(10)から降伏関数

$$f = J_2^p - H(J_2^e) = 0 \quad (15)$$

$$H(J_2^e) = \frac{9}{10} \beta \varepsilon_0 \left(\frac{J_2^e}{\varepsilon_0} \right)^3$$

を構築できる。この式の両辺を微分すると

$$\frac{\mathbf{e}^e : d\mathbf{e}^p}{2J_2^e} = H' \frac{\mathbf{e}^e : d\mathbf{e}^e}{2J_2^e}; \quad H' = \frac{dH}{dJ_2^e} \quad (16)$$

となり、そこで式(9)と式(14)を代入すると

$$d\mathbf{g} = \frac{H'}{1 + H' \frac{1}{2(J_2^e)^2}} \mathbf{e}^e : d\mathbf{e} \quad (17)$$

$$= \frac{H'}{1 + H' \frac{1}{2(J_2^e)^2}} \mathbf{e}^e : d\mathbf{e}$$

が得られる。式(11)、(14)と式(17)から、塑性ひずみ増分 $d\mathbf{e}^p$ は

$$d\mathbf{e}^p = d\mathbf{e}^p + \text{Id}I_1^p = d\mathbf{g}\mathbf{e}^e + \text{Id}dJ_2^p \quad (18)$$

$$= d\mathbf{g}(\mathbf{e}^e + \text{Id}J_2^e)$$

$$= \frac{H'}{1 + H' \frac{1}{2(J_2^e)^2}} \mathbf{e}^e \otimes (\mathbf{e}^e + \text{Id}J_2^e) : d\mathbf{e} = \mathbf{L} : d\mathbf{e}$$

で表すことができるので、弾塑性損傷構成式は下記になる。

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \mathbf{C}^{ep} : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (19)$$

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C} : (\mathbf{I} - \mathbf{L})$$

ここで得られた弾塑性テンソル $\mathbf{C}^{ep}$ を本作業で有限要素法ソフトウェア Advance/FrontSTR に実装することになるが、以下の2点を注意すべきである：

1) 式(19)に示した弾性テンソル $\mathbf{C}$ は式(2),(7),(8)に示した $\mathbf{C}, \mathbf{C}', \mathbf{C}''$ を代入することが可能である。

2) テンソル $\mathbf{L} = \frac{H'}{1 + H' \frac{1}{2(J_2^e)^2}} \mathbf{e}^e \otimes (\mathbf{e}^e + \text{Id}J_2^e)$ は正

定、非対称である。この式を採用する時、例えば対称弾性マトリクス $\mathbf{C}$ と $\mathbf{C}'$ を採用しても得られる弾塑性テンソル $\mathbf{C}^{ep}$ は非対称になる。ただし、塑性体積ひずみの影響を無視すれば、 $\mathbf{L}' =$

$\frac{H'}{1 + H' \frac{1}{2(J_2^e)^2}} \mathbf{e}^e \otimes \mathbf{e}^e$ となり、対称化すると可能である。

表1では損傷弾塑性構成式の定式化と特徴をまとめた。

表1 損傷弾塑性性構成式の比較

	定式	特徴
B1	$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}$	正定、対称
B2	$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C} : (\mathbf{I} - \mathbf{L})$	正定、非対称
B3	$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}' : (\mathbf{I} - \mathbf{L})$	非正定、非対称
B4	$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}'' : (\mathbf{I} - \mathbf{L})$	非正定、非対称
B5	$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C} : (\mathbf{I} - \mathbf{L}')$	正定、対称
B6	$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}' : (\mathbf{I} - \mathbf{L}')$	非正定、非対称
B7	$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}'' : (\mathbf{I} - \mathbf{L}')$	非正定、対称

2.4. リターンマッピング法の定式化

弾塑性解析においては、すべての物性評価点での降伏条件を満足させる必要がある。従来のリタ

¹ 参考文献[1]では $X = \sqrt{3}I_1^e/J_2^e$ と定義されている。しかし、この定義は $X = -1$ の時単軸圧縮状態、 $X = 1$

の時単軸引張状態を表せない。本作業では一般的な定義方法(例えば参考文献[2]p.380)を参照し、上記定義を使用した。

ーンマッピング法は後退 Euler 法を用いた応力を降伏面に効率的に帰着させる方法であるが、本実装では採用している降伏関数(15)は応力の関数ではないため、下記のようにリターンマッピング計算を示す。

ひずみの増分計算において、時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ における積分を行う。この時間間隔が始める時点で、弾性ひずみ ϵ_n^e 、塑性ひずみ ϵ_n^p やその他の内部変数が既知で、その時間におけるひずみ増分 $\Delta\epsilon$ が既知される時、下記連立方程式を解くことになる。

$$\begin{cases} \epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \Delta\epsilon \\ \Delta\epsilon = \Delta\epsilon^e + \Delta\epsilon^p \\ \epsilon_{n+1}^e = \epsilon_n^e + \Delta\epsilon^e \\ \epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n^p + \Delta\epsilon^p \\ \Delta\epsilon^p = D(\epsilon_{n+1}^e) \Delta J_2^p + \Delta g * \epsilon_{n+1}^e \\ f(\epsilon_{n+1}^e, \epsilon_{n+1}^p) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

ここでは、塑性体積ひずみの計算が式(12)、塑性偏差ひずみの計算は式(14)を使用した。

リターンマッピング計算では、下記 2 ステップでこの方程式を解く：

1) 試行弾性ステップ

まず時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ のステップは弾性であることと仮定する。その時 $\Delta g = 0$ であるため

$$\begin{cases} \epsilon_{n+1}^{etrial} = \epsilon_n^e + \Delta\epsilon \\ \epsilon_{n+1}^{ptrial} = \epsilon_n^p \end{cases} \quad (21)$$

もし

$$f^{trial} = f(\epsilon_{n+1}^{etrial}, \epsilon_{n+1}^{ptrial}) \leq 0 \quad (22)$$

ならば、状態量を更新してアルゴリズムは終了する。そうでなければ、以下の塑性修正ステップへ移す。

2) 塑性修正ステップ

このステップでは繰り返し計算において塑性ひずみ増分を計算し、降伏条件 $f = f(\epsilon_{n+1}^e, \epsilon_{n+1}^p) = 0$ を満足させる。まず、この降伏条件をあるひずみ状態 $(\epsilon_0^e, \epsilon_0^p)$ の近辺 Taylor 展開を行い、第 1 微分のみをとれば、次式となる。

$$\frac{\mathbf{e}^e : d\mathbf{e}^p}{2J_2^e} = H' \frac{\mathbf{e}^e : d\mathbf{e}^e}{2J_2^e}; H' = \frac{dH}{dJ_2^e} \quad (23)$$

降伏条件を満足するため、 $f=0$ となる必要がある。ここで式(20)を導入すれば

$$dg = \frac{1}{1 + H'} \frac{1}{2(J_2^e)^2} (H' \mathbf{e}^e : d\epsilon - 2f_0 J_2^e) \quad (24)$$

が得られる。この式を用い、 g の増分を計算すると、塑性は偏差ひずみ増分、弾性偏差ひずみ増分、塑性体積ひずみ増分、弾性体積ひずみ増分の順ですべてのひずみ増分を計算でき、新たなひずみ状態 (ϵ^e, ϵ^p) が得られる。その時の降伏関数値 f が計算され、この時 $f \rightarrow 0$ になれば計算終了し、そうでない場合もう一度 dg を計算し、ひずみ状態を更新する。この計算過程を繰り返し、方程式(20)を解くことになる。

3. 三軸圧縮条件下のコンクリート円柱の変形解析

文献[1]ではコンクリート円柱を鉄の円筒の中に入れ、コンクリート円柱を軸方向で圧縮する実験を行い、三軸圧縮条件下のコンクリートの変形特性を研究した。この実験ではコンクリート外側の鉄の円筒が内圧受け、弾塑性変形状態になる。円筒が十分薄い時、円筒受ける内圧 P と円筒材料の降伏応力 σ_s 、円筒の内径 r_i と外径 r_o の関係式は以下である[3]

$$P = \sigma_s \ln \frac{r_o}{r_i} \quad (25)$$

この数値はコンクリート外周に受ける拘束力になる。そのため、円筒内のコンクリート円柱は半径方向に大きさ P の圧力を受け、軸方向圧縮強制変位を受けることで上記実験をモデル化することができる。この三軸圧縮変形問題の理論解は付録 II に示している。この章では、上記問題を有限要素解析ソフトウェア Advance/FrontSTR を用い計算し、理論解結果と比べ、第 2 章に提案した定式化とその実装の有効性を検証する。

変形の対称性から、円柱軸方向一層、四分の一円柱を解析対象にした。そのメッシュ図は図 1 に示している。メッシュはプリズム要素 CPRIS6(要素数 9)と六面体要素 CHEXA8 (要素数 36)、節点数 51 から構築される。

これらの文献[1]に示した実験結果を比較できるように、文献[1]に示したコンクリート材質を用いる。

表 2 材質一覧

初期ヤング率	22921.6 MPa
初期ポアソン比	0.235
強度 f_c	29MPa
ϵ_0	0.0025
修正変数 β	1.0

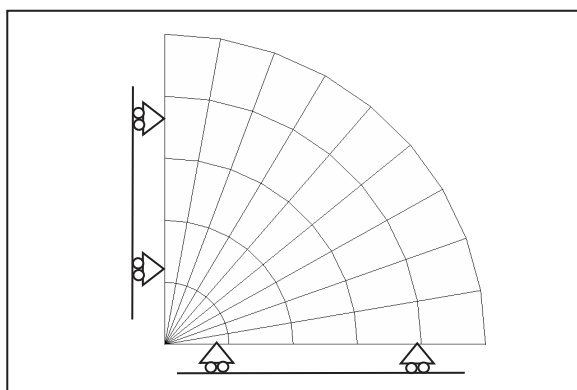


図 1 メッシュ図

文献[1]円周方向に拘束力 $P=3.40\text{MPa}$, 6.90MPa , 8.80MPa , 12.0MPa 時の実験結果を示している。図 2 では、この 4 ケースを理論解と Advance/FrontSTR を用いた有限要素解析の結果を示している。この図に示されたように、理論解と有限要素法解析の結果が完全に一致していることが分かり、本実装の有効性を検証された。

4. まとめ

前川ら[1]によって提案されたコンクリート用弾塑性損傷構成則から接線又は割線剛性マトリクスを導入し、応力増分計算にリターンマッピングの定式化を行った。これら定式を有限要素解析ソフトウェア Advance/FrontSTR に実装し、三軸圧縮条件下のコンクリートの变形問題を解析した。この有限要素法による解析結果は理論解と比較し、実装の有効性を検証した。

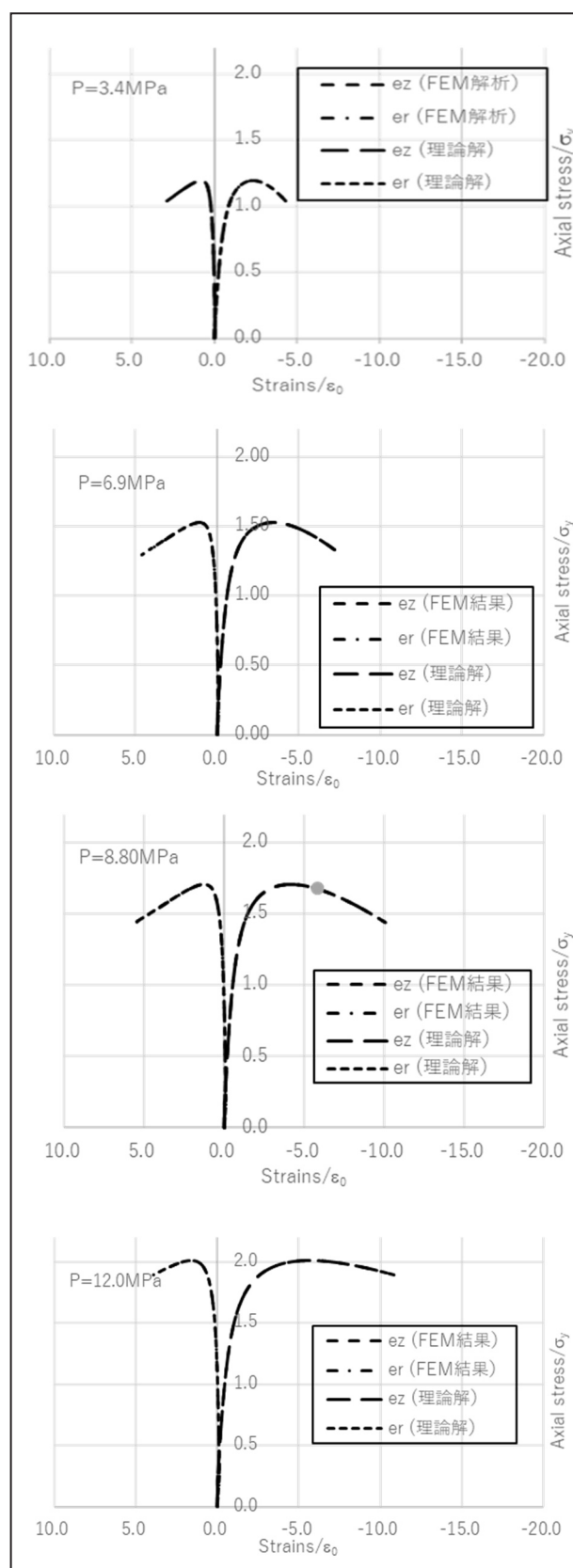


図 2 ひずみー応力関係図
(ez: 軸方向ひずみ ; er: 円周方向ひずみ)

参考文献

- [1] Maekawa, K., Okamura, H. and Pimanmas, A:
Nonlinear Mechanics of Reinforced Concrete,
Taylor & Francis, 2003
- [2] Chen, W.F.: Plasticity in reinforced concrete, J.
Rose, 2007
- [3] Hill. R.: The mathematical theory of plasticity,
Oxford, 1998

付録 I: 不変量の定義と記号

等方性の材料構成式を導入するため、テンソルの等方性不変量を使うことになる。しかし、文献[1]に使われた不変量の定義は通用なものとは若干違うものもあり、この節ではまず本文で使われている不変量の定義や常用テンソルの記号をまとめる。

1) 応力関連変数

応力 σ の第一不変量 I_1

$$I_1 = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \quad (\text{II})$$

偏差応力 s の第二不変量 J_2

$$J_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(s^2)} \quad (\text{I2})$$

2) ひずみ関連変数

ひずみ ϵ 、偏差ひずみ e と表す。ひずみの弾性と塑性成分は上付き添え字 e と p で表す。

弾性ひずみ ϵ^e の第一不変量 I_1^e

$$I_1^e = \frac{1}{3} \text{tr}(\epsilon^e) \quad (\text{I3})$$

偏差応力 s の第二不変量 J_2

$$J_2^e = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}((\epsilon^e)^2)} \quad (\text{I4})$$

$$J_3^e = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \text{tr}((\epsilon^e)^3)}$$

塑性偏差ひずみ e^p の第 2 不変量 J_2^p

$$J_2^p = \int dJ_2^p; \quad dJ_2^p = \frac{e^e: de^p}{2J_2^e} \quad (\text{I5})$$

付録 II: 三軸圧縮条件下コンクリート円柱の変形

この節では円柱軸方向で圧縮され、半径方向圧力 P を受けるコンクリート円柱変形の理論解をまとめる。

三軸圧縮力を受ける円柱はその対称性から、せん断ひずみやせん断応力がゼロであり、円周方向と半径方向のひずみや応力値が同じである。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta = P; \quad \epsilon_r = \epsilon_\theta \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \\ \epsilon_{r\theta} &= \epsilon_{rz} = \epsilon_{\theta z} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II1})$$

この特徴から、円柱内のひずみと応力は以下のように表示できる：

- ・ 応力 σ と偏差ひずみ s

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r & & \\ & \sigma_r & \\ & & \sigma_z \end{bmatrix}; \quad s = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -p & & \\ & -p & \\ & & 2p \end{bmatrix}; \quad (\text{II2})$$

$$p = \sigma_z - \sigma_r$$

- ・ 弾性ひずみ ϵ と弾性偏差ひずみ e

$$\epsilon^e = \begin{bmatrix} \epsilon_r & & \\ & \epsilon_r & \\ & & \epsilon_z \end{bmatrix}; \quad e^e = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -q & & \\ & -q & \\ & & 2q \end{bmatrix}; \quad (\text{II3})$$

$$q = \epsilon_z - \epsilon_r$$

- ・ 応力不変量

$$I_1 = \frac{1}{3} (\sigma_z + 2\sigma_r); \quad J_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} |p|; \quad J_3 = \frac{1}{3} \sqrt{2} p \quad (\text{II4})$$

- ・ ひずみ不変量

$$I_1^e = \frac{1}{3} (\epsilon_z + 2\epsilon_r); \quad J_2^e = \frac{1}{\sqrt{3}} |q|; \quad J_3^e = \frac{1}{3} \sqrt{2} q \quad (\text{II5})$$

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{J_3^e}{J_2^e} \right)^3 = -1$$

また、弾塑性構成式と損傷構成式は以下のように表示できる。

- ・ 弾性構成式

$$\text{体積成分: } I_1 = 3KI_1^e \quad (\text{II6})$$

$$\text{偏差成分: } s = 2G_0 \omega e; \text{あるいは } p = 2G_0 \omega q \quad (\text{II7})$$

- ・ 損傷構成式: 式(3)

- ・ 塑性構成式:

$$\text{体積成分: } dI_1^p = D dJ_2^p \quad (\text{II8})$$

偏差成分： $d\mathbf{e}^p = d\mathbf{g}\mathbf{e}^e$

$$= \frac{1}{3} d\mathbf{g} \begin{bmatrix} -q & & \\ & -q & \\ & & 2q \end{bmatrix} \quad (\text{II9})$$

ここで示したように本変形過程は比例塑性変形： $d\mathbf{e}_z^p = -2d\mathbf{e}_r^p$ である。塑性変形の第2不変量

増分は $dJ_2^p = \sqrt{\frac{1}{2}(2(d\mathbf{e}_r^p)^2 + (d\mathbf{e}_z^p)^2)} = \sqrt{3}|d\mathbf{e}_r^p|$ で

あり、その積分は陽的に表せる：

$$J_2^p = \sqrt{3}|e_r^p| \quad (\text{II10})$$

式(10)を上式に代入すれば、塑性ひずみの偏差成分を陽的に計算することができる

$$|e_r^p| = \frac{0.9}{\sqrt{3}} \varepsilon_0 \left(\frac{J_2^e}{\varepsilon_0} \right)^3 \quad (\text{II11})$$

※ 技術情報誌アドバンスシミュレーションは、アドバンスソフト株式会社 ホームページのシミュレーション図書館から、PDF ファイル（カラー版）がダウンロードできます。（ダウンロードしていただくには、アドバンス/シミュレーションフォーラム会員登録が必要です。）