構造解析ソフトウェア Advance/FrontSTRへ修正Cam-Clay構成則の導入

袁　熙*

Introduction of Modified Cam-Clay Constitutive Model into Advance/FrontSTR

Xi Yuan*

粘性土の構成式として一般的な Cam-Clay 構成式を Advance/FrontSTR へ導入した。本文はまずこのモデルの特徴をまとめ、その構成式の有限要素法定式化を行った、さらに、その実装方法や相関追加機能を紹介し、最後に検証計算を通しその実装の正確性を確認した。

Keywords:　構造解析、地盤材料、Cam-Clay 構成式

1. はじめに

粘土の変形モデルとしては Advance/FrontSTR はすでに Mohr-Coulomb や Drucker-Prager 構成則を実装しているが、これらの材質モデルは一般に過圧密状態の土の力学挙動表現のみを対象としているので、正規圧密状態の土には適用できない。本開発は粘性土の構成式として一般的な Cam-Clay モデル[1]を導入した。

2. 定式化

粘性土の変形解析をできるようにするため、土や砂のような多孔質材料の変形記述や弾性変形構成式も必要である。この節では、多孔質材の性質や弾性変形構成式導入してから、Cam-Clay 弾塑性構成式の定式化を行う。

2.1. 多孔質材の体積変形

2.1.1. 間隙比と体積ひずみの関係

多孔質材の間隙比 e は空隙あるいは液体と固体粒子の体積の比と定義される。

$$e = V_{void}/V_{solid} \tag{1}$$

多孔質材が変形する時、固体粒子の体積変化なしと仮定した場合では、材料の間隙比からその体積ひずみを算出することができる。多孔質材の体積がV_0からVまで変化した場合は、その体積比は以下である。

$$J = \frac{V}{V_0} = \frac{1+e}{1+e_0} \tag{2}$$

この時の体積ひずみ及び体積ひずみ増分は以下のように定義できる。

$$\varepsilon_v = lnJ; \quad d\varepsilon_v = \frac{dV}{V} \tag{3}$$

2.1.2. 土の体積変形行為

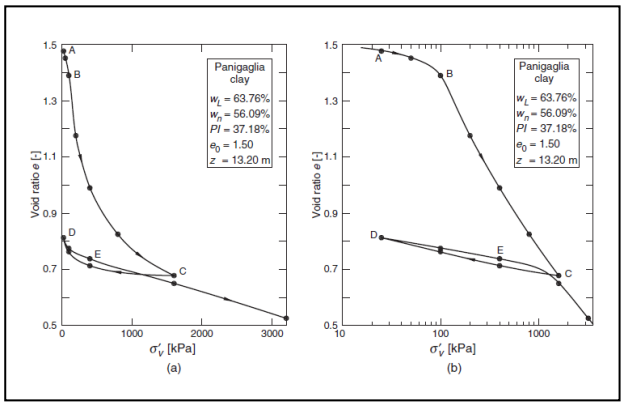

図 1　間隙比 e--静水圧 p 関係([2]p116)

図 1 では土の圧密試験結果を示している。この曲線は A→B→C→D→E→C の順番で変形する行為を示しているが、A→B と C→D→E→C と間に弾性変形、B→C の間に弾塑性変形を行っていることを示している。また、B 点に対応した p 値は初期降伏応力であり、この降伏応力は C 点に向いだんだん大きくなることが分かる。さらに、こ

*アドバンスソフト株式会社　第 2 事業部
2nd Computational Science and Engineering Group, AdvanceSoft Corporation

のような実験結果から、e-log(p)曲線は近似的に図2 に示したような直線となっていることが分かり、すなわち、下記２種類の直線方程式が得られる。

$$e = e_{0\lambda} - \lambda ln\ \frac{p}{p_0}$$
$$e = e_{0\kappa} - \kappa ln\ \frac{p}{p_0} \quad (4)$$

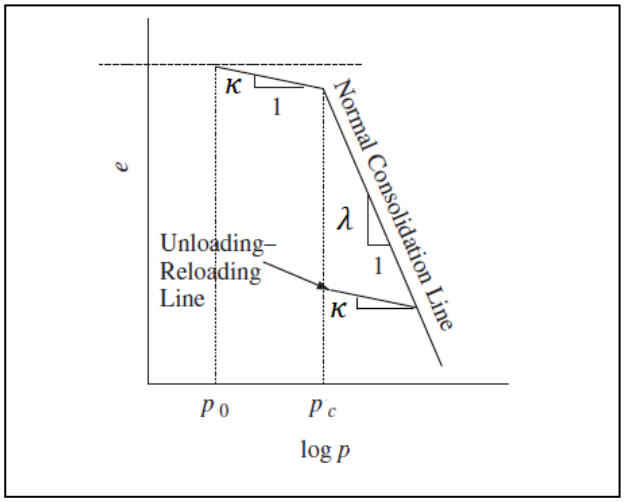

図 2　e-log(p)関係

また、2.1.1 節に示した間隙比と体積ひずみ間に換算関係から、体積ひずみと log(p)の間に同じ直線関係を存在しており、本文の以降部分は直接体積ひずみと log(p)の直線関係を利用する。まず、弾性領域では

$$d\varepsilon_v^e = -\kappa^* d(\ln p);\quad \kappa^* = \frac{\kappa}{1+e_0} \quad (5)$$

ここではκは材料の対数弾性係数である。弾塑性変形状態では、体積ひずみ増分は以下のように分解できる。

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_v^e + d\varepsilon_v^p$$
$$= -\kappa^* d(lnp) - (\lambda^* - \kappa^*) d(\ln p_c) \quad (6)$$
$$\text{with } \lambda^* = \frac{\lambda}{1+e_0}$$

ここではλは材料の対数塑性係数である。

また、この式から

$$dp_c = -\frac{1}{\lambda^* - \kappa^*} p_c d\varepsilon_v^p \quad (7)$$

が得られる。この式は降伏面の拡大、すなわち体積ひずみ硬化を定義した。

2.2. 多孔質材の弾性変形計算

2.2.1. 多孔質材の弾性構成式

上記式(5)から、多孔質弾性体積モジュール K は下式に書くことができる。

$$K = \frac{dp}{d\varepsilon_v^e} = -\frac{p}{\kappa^*} \quad (8)$$

また、材料のポアソン比νは定数だと仮定し、そのせん断弾性係数は下式から計算できる。

$$G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} K \quad (9)$$

この二つの弾性係数が分かれば、材料の弾性マトリクスは下式になる。

$$D = \begin{bmatrix} K+\frac{3}{4}G & K-\frac{2}{3}G & K-\frac{2}{3}G & & & \\ & K+\frac{3}{4}G & K-\frac{2}{3}G & & 0 & \\ & & K+\frac{3}{4}G & & & \\ & & & G & & \\ & SYM & & & G & \\ & & & & & G \end{bmatrix} \quad (10)$$

2.2.2. 弾性応力更新

弾性ひずみ増分$\Delta\varepsilon^e$ が分かれば、その体積成分を式(5)まで代入すれば、下式のように弾性体積応力増分を計算できる。

$$p^{i+1} = p^i \exp\left[\frac{-\Delta\varepsilon_v^e}{\kappa^*}\right] \quad (11)$$

この結果が得られたら、この変形ステップでの弾性体積係数は

$$K = \frac{p^{i+1} - p^i}{\varepsilon_v^e|^{i+1} - \varepsilon_v^e|^i} \quad (12)$$

から計算でき、その結果を下式に代入してから、弾性応力増分を計算できる。

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = K\Delta\varepsilon_v^e + 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{e\prime} \quad (13)$$

ここでは$\Delta\varepsilon^{e\prime}$は弾性偏差ひずみ増分である。

2.3. 修正 Cam-Clay 塑性変形計算

2.3.1. Cam-Clay 降伏関数の定義

2.1.2 節に示した体積成分のみの弾塑性関係式

(6)を 3D 問題まで拡張するため、下記応力不変量

$$p = -\frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{I};\quad q = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}} = \sqrt{3\boldsymbol{J}_2} \tag{14}$$

を導入する。ここでは,$\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{s}$は応力と偏差応力テンソルであり。この時の Cam-clay 降伏関数は以下である。

$$f(\boldsymbol{\sigma},p_c) = \frac{q^2}{M^2} + p(p-p_c) \tag{15}$$

ここでは,材料パラメータ M とp_cは降伏面の形状を定義している。

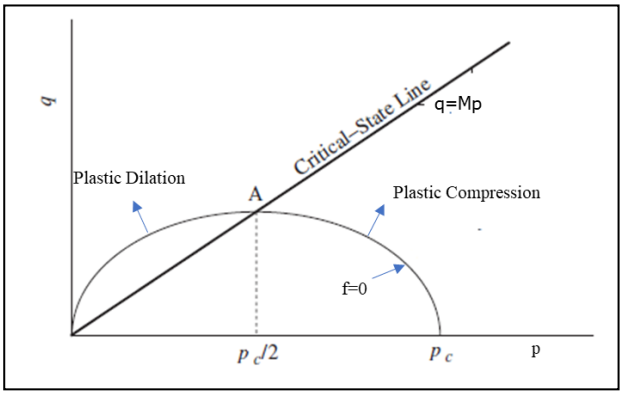

図 3　Cam-clay 降伏面

Cam-clay 降伏関数の特徴の一つは限界状態線(CSL: Critical-State Line)を沿って変形した場合、最後に下式に示したような静水圧と体積変化が起こらない限界状態に到達することになる。

$$\dot{p} = 0;\quad \dot{\varepsilon}_v = 0 \tag{16}$$

また、材質p_cは降伏面の大きさを定義しているが、その変化量は式(6)で定義されている。

$$dp_c = -\frac{1}{\lambda^* - \kappa^*} p_c d\varepsilon_v^p \tag{17}$$

2.3.2. Cam-Clay 弾塑性マトリクス([3],chapter 10)

連合流れ則を使用し、塑性ひずみ増分を計算する。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^p + \tfrac{1}{3}\dot{\varepsilon}_v^p\boldsymbol{I}\ ;$$
$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^p = \dot{\gamma}\frac{3}{M^2}\boldsymbol{s};\ \dot{\varepsilon}_v^p = (p_c - 2p) \tag{18}$$

また、降伏関数の整合条件は

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial a}\dot{a} = \boldsymbol{N}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} - p\dot{p}_c = 0;$$
$$\boldsymbol{N} = \frac{3}{M^2}\boldsymbol{s} + \frac{1}{3}(p_c - 2p)\boldsymbol{I} \tag{19}$$

である。応力の増分計算式

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}^e:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{D}^e:(\dot{\varepsilon} - \dot{\gamma}\boldsymbol{N}) \tag{20}$$

を上記降伏関数の整合条件に代入すると

$$\dot{f} = \boldsymbol{N}:D^e:\dot{\varepsilon} - \dot{\gamma}(\boldsymbol{N}:\boldsymbol{D}^e:\boldsymbol{N} + 2pH) = 0 \tag{21}$$

となり、増分係数を計算できる。

$$\dot{\gamma} = \frac{\boldsymbol{N}:\boldsymbol{D}^e:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\boldsymbol{N}:\boldsymbol{D}^e:\boldsymbol{N} + 2p\theta a N_v};\ \theta = -\frac{1}{\lambda^* - \kappa^*} \tag{22}$$

この式を式(20)まで代入すると Cam-Clay 弾塑性構成式が得られる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}^{ep}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$
$$= \left(\boldsymbol{D}^e - \frac{\boldsymbol{D}^e:\boldsymbol{N}\otimes\boldsymbol{N}:\boldsymbol{D}^e}{\boldsymbol{N}:\boldsymbol{D}^e:\boldsymbol{N} + 2p\theta a N_v}\right):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{23}$$

2.3.3. Return mapping による応力更新計算

以下の順番で応力更新計算を行う。

(1) 初期条件：$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0};\ \boldsymbol{\Delta\gamma_i} = \boldsymbol{0}$とし、2.2.2 節に示した手順で弾性応力増分を計算し、試応力値$\boldsymbol{p^{try}}, \boldsymbol{q^{try}}$を得る。

(2) 収束判定：得られた試応力値を式(15)に代入し、収束条件$\boldsymbol{f_i} < \boldsymbol{閾値}$の場合では、計算完了し、そうしなければ、下記ステップまで進む。

(3) 下式を用い、弾性体積係数を計算する。

$$K^i = -\frac{\Delta p^i}{\Delta\varepsilon_{vi}^e} = -p^i\left(exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon_{vi}^e}{\kappa^*}\right) - 1\right) \tag{24}$$

(4) Newton-Raphson 法を用い、塑性係数$\dot{\boldsymbol{\gamma}}$を更新する

$$f_{i+1} = f_i + \frac{\partial f_i}{\partial\dot{\gamma}}d\dot{\gamma}_i = 0;\ \dot{\gamma}_{i+1} = \dot{\gamma}_i + d\dot{\gamma}_i \tag{25}$$

ここでは

$$\frac{\partial f}{\partial\dot{\gamma}} = -\frac{6G^i c_q^i}{M^2} + 2\frac{c_p^i}{\kappa^*}p^{i+1}p^{i+1}$$
$$+c_p^i\left(\frac{1}{\kappa^*} - \frac{1}{\lambda^* - \kappa^*}\right)p^{i+1}p_c^{i+1} \tag{26}$$

$$c_p^i = 2p^i - p_c^i;\ c_q^i = \frac{2q^i}{M^2}$$

(5) 下式を用い、応力値を更新する

$$\Delta\varepsilon_v^{pi} = c_p^i\dot{\gamma}_{i+1};\ \Delta\varepsilon_v^{ei} = \Delta\varepsilon_v - \Delta\varepsilon_v^{pi}$$
$$p^{i+1} = p^i \exp\left[\frac{-\Delta\varepsilon_v^{ei}}{\kappa^*}\right]$$
$$q^{i+1} = q^{try} - 3Gc_q^i\dot{\gamma}_{i+1} \quad (27)$$
$$p_c^i = p_c^i \exp\left[\frac{-\Delta\varepsilon_v^{pi}}{\lambda^* - \kappa^*}\right]$$

(6) i=i+1 ステップカウンターを増やし、(2) まで戻り、繰り返し計算を行う。

3. Advance/FrontSTR への実装

本開発作業は(1) 平衡地応力計算機能、(2) 多孔質材弾性構成式と(3)Cam-Clay 弾塑性構成式を導入した。その詳細は以下である。

3.1. 平衡地応力(GEOSTATIC)計算

式(8)に示したように、上記多孔質材の弾性構成式を採用する時、初期応力がないと変形材の剛性がゼロとなり、全く計算できない状態である。この問題を解消するため、Cam-Clay モデルを使用する際、以下の２種類の方法を経由し、初期地応力をセットする必要がある。

3.1.1. 初期応力をセットする方法

入力データ中に以下の項目で要素グループごとに初期応力をセットする。

!INITIAL CONDITION, TYPE=GEOSTRESS

ただ、入力された応力分布はほぼ釣り合った状態と要求される。そうではない場合では、収束計算に悪い影響を与え、収束しなくなる可能性がある。そのため、この方法は釣り合い状態をほぼ分かる簡単な問題では利用することを進める。

3.1.2. GEOSTATIC スッテプ計算

予備計算ステップとした平衡地応力状態を計算するステップを実行する。その指定方法は下記のようにスッテプ設定を行う必要がある。

!STEP, GEOSTATIC

このスッテプでは

- Cam-Clay 材を一般的な弾性材質と入れ替え、計算を行う。
- 計算完了後の応力状態を Cam-Clay 材料の初期状態とし、Cam-Clay 材質の降伏応力や塑性ひずみもこの状態の数値と合わせ、セットされる。

この方法は複雑な初期応力分布を求めることができる。

3.2. 多孔質材の弾性変形解析

Cam-Clay 材ではなくでも、多孔質材料の弾性変形を計算することができる。多孔質材料の定義は以下である。

! POROUS_ELASTIC

κ, ν, e0, E, μ

ここでは、前三つの変数はそれぞれ対数体積弾性係数(式(5)を参照)、ポアソン比と初期間隙比(式(1)を参照)と示している。後ろ二つの変数 E, μは GEOSTATIC 予備計算ステップ利用する線形弾性ヤング率とポアソン比を定義しており、GEOSTATIC 予備計算ステップがない時、不要である。

3.3. Cam-Clay 材の弾塑性変形解析

Cam-Clay 材質の定義は以下である。

!CLAY_PLASTICITY

λ, M, a0

それぞれ対数体積塑性係数(式(6) を参照), 降伏面計算を定義する材料パラメータ M と初期降伏条件$a_0 = p_{c0}/2$(図 3 を参照)を示している。

4. テスト計算

4.1. 三軸圧密試験下 Cam-Clay 材の変形行為

三軸圧密試験下の Cam-Clay 材の変形行為を計算した。本計算では GEOSTATIC 予備計算ステップがなく、初期応力 100 を予めセットし、その後圧力をかけて変形させた。また、本計算使用した材質は表 1 に示している。

表 1　材質一覧表

κ	ν	e0	λ	M	a0
0.026	0.3	1.08	0.174	1.0	58.3

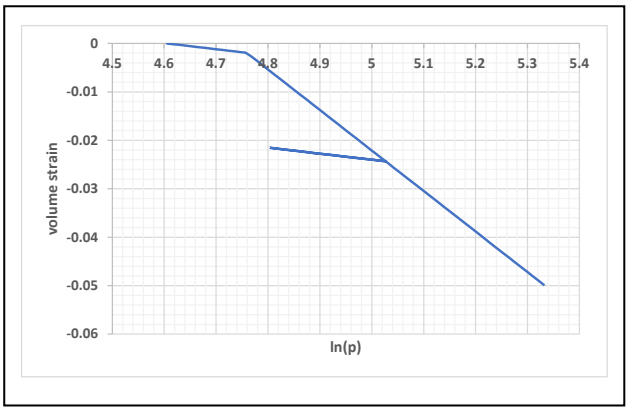

図 4　対数静水圧と体積ひずみの関係

計算結果から、対数静水圧 ln(p)と体積ひずみの関係図(図 4)にまとめた。この図は図 2 に示した直線関係を再現しており、また、弾性変形から塑性変形、また塑性変形から弾性変形への変化過程も再現した。

4.2. 圧密された Cam-Clay 材のせん断変形

この計算では、まず変形材を 3 軸方向で $0.25p_{c0}$, $0.5p_{c0}$,$0.75p_{c0}$まで圧縮する。これらの状態はそれぞれ過圧密比 OCR(overconsodidation ratio)4,2,4/3 と対応する。この後、0.5%の平面せん断ひずみまで変形させる。図 5 に示したように、上記計算条件はそれぞれ変形硬化、変形軟化と限界変形状態を対応しており、このテストを通し、本実装はこれらの変形状態を再現できるかを検証するのは主な目的である。

本計算でも GEOSTATIC 予備計算を実行していない。

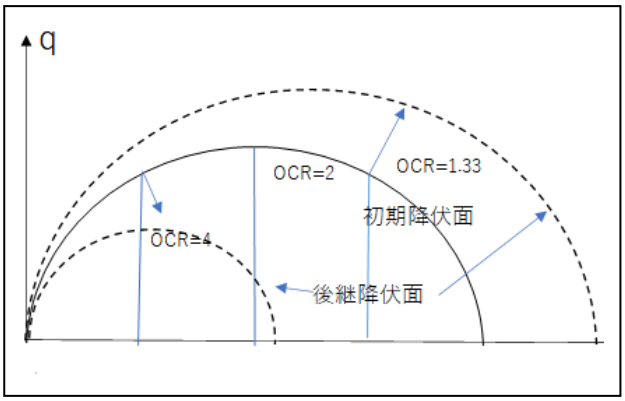

図 5　圧密-せん断変形材の応力ルート、変形硬化、変形軟化と限界変形状態三種類の変形ルートが存在する

また、本計算使用した材質は表 2 に示している。

表 2　材質一覧表

κ	ν	e0	λ	M	p_{c0}
6.6e-4	0.3	0.78	7.7e-3	1.15	3.0e6

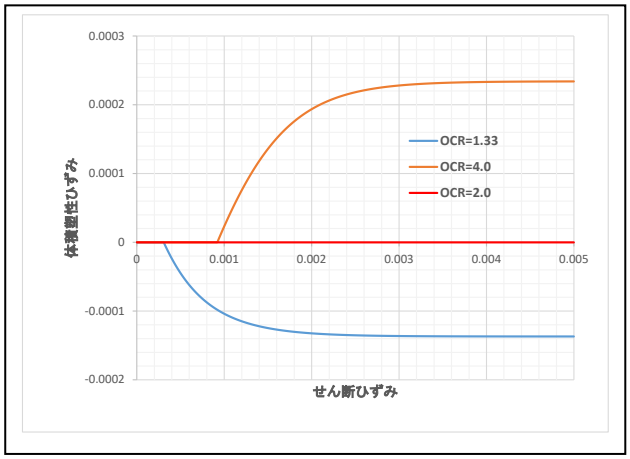

図 6　異なる OCR 値時のせん断ひずみ一体積塑性ひずみε_p^v関係：$\varepsilon_p^v > 0$の時材料軟化し、ε_p^v <0の時材料が圧縮され、硬くなる。

図 6 に示した計算結果から以下の三種類の変形パターンを示している。

- OCR>2 の時、材料が膨張、軟化し、だんだん限界状態へ近づく。
- OCR=2 の時、材料が降伏後、直ちに限界状態に入る。この状態では、材料の体積変化が起こらない、材料硬化、軟化もしない理想塑性状態である。
- OCR<2 の時、材料が圧縮され、材料硬化しながら、だんだん限界状態へ近づく。

これらの計算結果は Cam-Clay モデルの変形の特徴を捉えている。

5. まとめ

粘性土の構成式として一般的な Cam-Clay 構成式と相関機能を Advance/FrontSTR へ導入した。これらの機能の導入することより、Advance/FrontSTR の土質力学への応用を拡張したほか、昨年度導入したコンクリート構成式と組み合わせ、土壌と建築物との連成解析も可能とな

る。また、本社では、土木関係の解析機能のさらなる拡張を予定しており、来年度は鉄筋コンクリートの解析機能を拡張する予定である。

参考文献

[1] David Mur Wood: Soil behavior and Critical State Soil Mechanics, Cambridge Univ., (1990).

[2] Renato Lancellotta, Geotechnical Engineering, Taylor & Francis (2009).

[3] E. A. de Souza Neto, D. Perić, D. R. J. Owen: Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications, John Wiley & Sons (2008).

※ 技術情報誌アドバンスシミュレーションは、アドバンスソフト株式会社 ホームページのシミュレーション図書館から、PDF ファイル（カラー版）がダウンロードできます。（ダウンロードしていただくには、アドバンス/シミュレーションフォーラム会員登録が必要です。）