

陰解法による3次元圧縮性流体解析の新手法

- SIMPLE法系列の限界を超えて -

三橋 利玄*

A New Method for 3D Compressible Fluid Analysis by Implicit Method

- Beyond the Limit of SIMPLE-Family Method -

Toshiharu Mitsuhashi*

3次元圧縮性流体解析の陰解法として SIMPLE 法系列の解法が良く利用されている。SIMPLE 法系列の解法は圧力、流速、エネルギーが強く結びつく流れや密度差の大きい流れなどの流体計算が困難なことがある。そこで、SIMPLE 法系列の枠組みを利用し、圧力 Poisson 方程式をエネルギー保存式に基づいて組み上げる ECBA 法を開発した。次に ECBA 法を用いて数種類の計算事例の解析を実施し、ECBA 法の妥当性、適用性を示した。本稿では ECBA 法の数値解法と計算事例を報告する。

Keywords: 3次元圧縮性流体解析、陰解法、ECBA 法、エネルギー保存式を基にした圧力 Poisson 方程式、衝撃波管、密度差の大きい流れ、自然対流、圧力上昇

1. はじめに

3次元圧縮性流体解析において、密度ベースの陽解法その他、圧力ベースの陰解法も良く利用されている。圧縮性流体解析の陰解法としては、SIMPLE 法[1]、SIMPLER 法[1]、SIMPLEC 法[2]などで代表される SIMPLE 法系列や Newton 法(例えば[3])などが主流として挙げられる。

SIMPLE 法系列は比較的容易にプログラム開発ができ拡張性も高いが、圧力と流速の計算(質量保存式ベースの圧力 Poisson 方程式の計算)とエネルギー保存計算が分離しているため、専門書などに記載されている通りでは圧縮性流体解析に適用することが難しい。SIMPLE 法系列を圧縮性流体解析に適用するために、保存式の計算で得られる圧力、密度、エネルギーのいずれかを、状態方程式で得られるものに置き換えている。経験的には密度を置き換えていることが多いようである。このようにすることで SIMPLE 法系列でも衝撃波管解析の計算を容易に行うことができるが、熱的

*アドバンスソフト株式会社 熱流動エンジニアリングセンター

Thermal Hydraulics Engineering Centre, AdvanceSoft Corporation

に厳しい場合や密度差の大きい流れの場合において計算が困難になることが度々起こる。

一方、Newton 法による流体計算では、エネルギー保存式に未知変数を集約させる方法に基づいているため、圧力、流速、エネルギーが強く結びついており、熱的に厳しい場合や密度差の大きい流れの場合の流体計算にも適用できる。しかしながら、数値計算上必要な Jacobian 行列に含まれる多数の偏微分項の計算のためにプログラムが煩雑になり、また、その偏微分項は滑らかな関数である必要があるため、プログラム開発を厄介なものとしている。さらには、保存式のソースターム項が大きな負にならないように気を使わなければならないソースターム項が扱づらい。なお、SIMPLE 法系列ではソースターム項を適切に線形化すれば、大きな負になっても計算しづらくなることを回避できる利点がある。

そこで、SIMPLE 法系列の欠点を補うという観点から、SIMPLE 法系列と同様の枠組みを利用し、Newton 法がエネルギー保存式を中心としたように、エネルギー保存式に基づいて圧力 Poisson 方程式を組み上げる方法を開発し、解析ソフトウェア

アとして具現化した。なお、本方法を、ECBA 法 (Energy Conservation Based Algorithm) と呼ぶこととする。SIMPLE 法系列の方法に必要な保存式の計算で得られる圧力、密度、エネルギーを状態方程式で得られるもので置き換えるということ、ECBA 法では必要はないという利点がある。

本稿では、ECBA 法の数値解法と妥当性、適用性の検討のために実施した計算で得られた検討結果を報告する。なお、実測に基づく詳細な検証計算はまだ実施していないので、今後の課題としたい。

2. ECBA 法による圧縮性流体解析モデル

2.1. 基礎方程式

本節では、デカルト座標系と円筒座標系に対する基礎方程式を示す。なお、以下の基礎方程式において、 $\alpha = 1$ のとき、円筒座標系の (r, θ, z) に対応し、 $\alpha = 0$ のときデカルト座標系の (x, y, z) に対応する。また、基礎式に対して体積多孔率 γ_v 、面積透過率 $\gamma_r, \gamma_\theta, \gamma_z$ 、抵抗 R_r, R_θ, R_z についても考慮した。粘性係数については、乱流粘性係数を流体の粘性係数との和で表わした実効粘性係数 $\mu_e (= \mu + \mu_t)$ とし、熱伝導度については乱流熱伝導度と熱伝導度の和で表わした実効熱伝導度 $\lambda_e (= \lambda + \lambda_t)$ とした。

(1) 質量保存式

$$\gamma_v \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial r} (r^\alpha \gamma_r \rho u) + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial \gamma_\theta \rho v}{\partial \theta} + \frac{\partial \gamma_z \rho w}{\partial z} = \Gamma \quad (1)$$

ここで、 Γ は質量の生成消滅を表す。

(2) 運動量保存式

① x 方向運動量保存式

$$\begin{aligned} \gamma_v \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial r^\alpha \gamma_r \rho u}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial \gamma_\theta v \rho u}{\partial \theta} - \frac{\alpha \gamma_v \rho v^2}{r} + \frac{\partial \gamma_z w \rho u}{\partial z} \\ = -\gamma_v \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) - R_r - \gamma_v \rho g_r \\ + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\alpha \gamma_r \mu_e 2 \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) \right] \\ + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\gamma_\theta \mu_e \left\{ \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \alpha \frac{v}{r} \right\} \right] \\ - \alpha \frac{2 \gamma_v \mu_e}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\gamma_z \mu_e \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

② y 方向運動量保存式

$$\begin{aligned} \gamma_v \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial r^\alpha \gamma_r \rho v}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial \gamma_\theta v \rho v}{\partial \theta} + \frac{\alpha \gamma_v \rho u v}{r} + \frac{\partial \gamma_z w \rho v}{\partial z} \\ = -\gamma_v \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) - R_\theta - \gamma_v \rho g_\theta \\ + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\alpha \gamma_r \mu_e \left\{ \frac{\partial v}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial u}{\partial \theta} - \alpha \frac{v}{r} \right\} \right] \\ + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\gamma_\theta \mu_e 2 \left\{ \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial v}{\partial \theta} + \alpha \frac{u}{r} \right\} \right] \\ + \alpha \frac{1}{r} \gamma_v \mu_e \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\gamma_z \mu_e \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

③z方向運動量保存式

$$\begin{aligned}
& \gamma_v \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial r^\alpha \gamma_r u \rho w}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial \gamma_\theta v \rho w}{\partial \theta} \\
& \quad + \frac{\partial \gamma_z w \rho w}{\partial z} \\
& = -\gamma_v \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) - R_z - \gamma_v \rho g_z \\
& + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\alpha \gamma_r \mu_e \left\{ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \right] \\
& \quad + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\gamma_\theta \mu_e \left\{ \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial w}{\partial \theta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial v}{\partial z} \right\} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\gamma_z \mu_e 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right]
\end{aligned} \tag{4}$$

(3)エネルギー保存式

$$\begin{aligned}
& \gamma_v \frac{\partial E}{\partial t} + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial r^\alpha \gamma_r (E + p) u}{\partial r} \\
& \quad + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial \gamma_\theta (E + p) v}{\partial \theta} \\
& \quad + \frac{\partial \gamma_z (E + p) w}{\partial z} \\
& = \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\alpha \gamma_r \lambda_e \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\
& \quad + \left(\frac{1}{r^2}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\gamma_\theta \lambda_e \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_z \lambda_e \frac{\partial T}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{5}$$

また、乱流熱伝導度 λ_t は、定圧比熱、乱流粘性係数および乱流プラントル数を用いて表わされる。

(4)状態方程式

状態方程式の一般系は次の通りである。現状、完全理想気体の状態方程式のみが組み込んでいるが、将来的には Peng-Robinson 式[4]や SRK 式[5]、さらには NIST/REFPROP[6]などの実在流体に対する状態方程式を導入する予定である。

$$\rho = f(p, T) \tag{6}$$

2.2. 数値解法

ECBA法による数値解法の計算の流れを図1に示す。

- ① 運動量保存式の圧力項を陽的に扱った連立方程式に対して BiCGStab[7]法等の行列ソルバーを用いて解き、流速の予測値を求める。
- ② 流速の予測値、新しい時刻の流速、圧力修正量の関係式(流速と圧力の関係式)、および圧力修正量に対する流速修正のため係数を求める。
- ③ エネルギー保存式に流速の予測値、流速修正係数などを代入して圧力修正量を変数とするエネルギー保存式ベースの圧力 Poisson 方程式の係数行列と荷重ベクトルを作成する。
- ④ 圧力 Poisson 方程式に対して BiCGStab 法等の行列ソルバーを用いて解き、圧力修正量を求める。
- ⑤ 圧力修正量を用いて、新しい時刻の圧力、流速、全エネルギーを更新する。
- ⑥ 質量保存式に新しい時刻の流速を代入しても密度に対する連立方程式を組み立て、BiCGStab 法等の行列ソルバーを用いて解いて、新しい時刻の密度を求める。
- ⑦ 全エネルギーを基に圧力、密度、流速を用いて、エンタルピーおよび内部エネルギーを求める。
- ⑧ 状態方程式に圧力、内部エネルギーまたはエンタルピーを代入して、温度およびその他物性を求める。

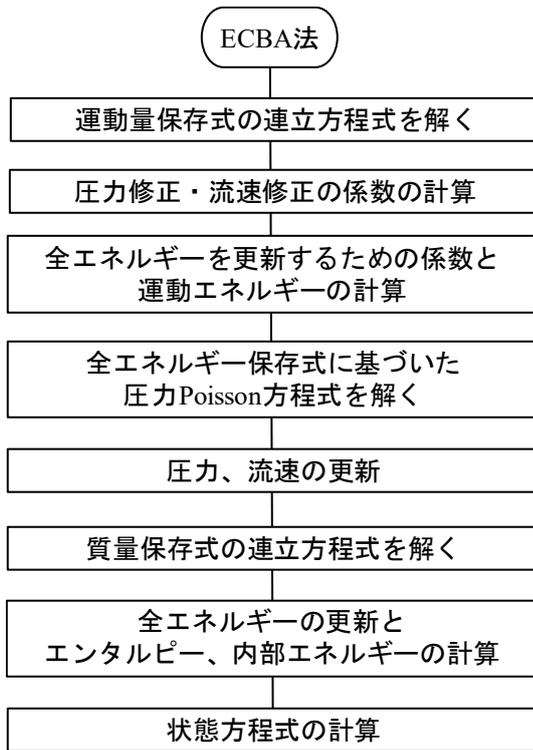


図 1 ECBA 法による数値解法の流れ

2.3. 離散化方法

本節では、基礎方程式の離散化式を示す。なお、密度については、空間的な変化（空間微分項）をゼロとし、温度によるセル内での密度変化は考慮すると仮定した。

空間に対する離散化に対して、図 2 に示したように運動量束(流速と密度の積) をセル境界面、圧力・温度のスカラー量をセル中心に定義する。なお、セル境界面の流速は運動量束が密度との積で定義することとしたため、密度について補間した値を除することとなる。

離散化式中の添え字については、式の煩雑さを避けるため基本位置 (i, j, k) からずれている添え字についてのみ式中に記述する。

スタaggerドメッシュを採用するため、コントロールボリュームの境界またはセル中心位置に必要な物理量が定義されていない場合がある。定義されていない点における物理量については、対流項の場合を除いて、周辺のその物理量の値より補間して求めることとする。

補間して求める必要のある変数に対しては、その変数を $[]$ で囲み右上の添え字に補間する方向、

右下に補間位置を示すこととする。なお、具体的な補間は次の通りである。

$$\begin{aligned}
 [f]^x &= \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} (f)_{i+1} \\
 &\quad + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} (f)_i \\
 [f]^y &= \frac{\Delta y_j}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} (f)_{j+1} \\
 &\quad + \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} (f)_j \\
 [f]^z &= \frac{\Delta z_k}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} (f)_{k+1} \\
 &\quad + \frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} (f)_k
 \end{aligned} \tag{7}$$

また、 $\langle \rangle$ の記号については、風上差分等のスキームを適用することを意味する。

各保存式における対流項の高精度化は、流束制限関数 minmod limiter 付き TVD 法を用いて離散化した。

保存方程式の対流項を 1 次精度風上差分法で離散化したとき、格子面において運ばれる保存量を、流速または運動量束の方向により、 $\varphi_j[u_j \geq 0], \varphi_{j+1}[u_j < 0]$ とした代わりに、TVD 法では、 $\varphi_{j+1/2}^L[u_j \geq 0], \varphi_{j+1/2}^R[u_j < 0]$ を次のようにして取り扱う。

$$\varphi_{j+1/2}^L = \varphi_j + \frac{1}{2}(\varphi_j - \varphi_{j-1}) \tag{8}$$

$$\varphi_{j+1/2}^R = \varphi_{j+1} - \frac{1}{2}(\varphi_{j+2} - \varphi_{j+1})$$

さらに、流束制限関数 minmod limiter を用いた Chakravarthy-Osher 法[8]を適用すれば、

$$\varphi_{j+1/2}^L = \varphi_j + \frac{1}{4}[(1-k)\bar{\Delta}_- + (1+k)\bar{\Delta}_+]_j \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_{j+1/2}^R &= \varphi_{j+1} - \frac{1}{4}[(1-k)\bar{\Delta}_+ + (1+k)\bar{\Delta}_-]_{j+1}
 \end{aligned}$$

であり、 $\bar{\Delta}_+$ および $\bar{\Delta}_-$ は、流束制限関数 minmod limiter を用いて、次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 \bar{\Delta}_+ &= \minmod(\Delta_+, b\Delta_-) \\
 \bar{\Delta}_- &= \minmod(\Delta_-, b\Delta_+)
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \minmod(x, y) &\equiv \text{sign}(1, x) \\ * \max(0, \min(\text{abs}(x), y * \text{sign}(1, x))) \\ &= \begin{cases} x & (xy > 0 \text{ and } |x| \leq |y|) \\ y & (xy > 0 \text{ and } |x| > |y|) \\ 0 & (xy \leq 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Delta_+ &\equiv \varphi_{j+1} - \varphi_j \\ \Delta_- &\equiv \varphi_j - \varphi_{j-1} \\ b &\equiv \frac{3-k}{1-k} \quad (k < 1) \end{aligned} \quad (12)$$

となる。なお、流束制限関数 \minmod limiter は次のように簡単化される[9]。

$$\begin{aligned} \minmod(x, y) &\equiv \\ &\frac{1}{2} [\text{sign}(1, x) + \text{sign}(1, y)] \\ * \min[\text{abs}(x), \text{abs}(y)] \\ &= \begin{cases} x & (xy > 0 \text{ and } |x| \leq |y|) \\ y & (xy > 0 \text{ and } |x| > |y|) \\ 0 & (xy \leq 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで k はパラメータであり、保存式ごとに入力で指定できるようにする。等間隔格子の場合、 $k = 1/3$ のとき、空間3次精度風上差分、 $k = 0$ のとき、空間2次精度風上差分、 $k = -1$ のとき、空間2次精度片側風上差分となる。また、 $k \Rightarrow 1$ とすると、空間2次精度中央差分に近づく。なお、 $k = 1/3$ のとき、補間式が Taylor 展開と同じことになるため、この値が推奨値とされている。 $\varphi_{j+1/2}^L [u_j \geq 0]$, $\varphi_{j+1/2}^R [u_j < 0]$ の最終的な式は、不等間隔格子の場合を考慮した次式となる。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} u_j &\geq 0 \\ \varphi_{j+1/2}^L &= \varphi_j^{n+1} \\ &+ \frac{1-k}{2} \Delta x_j \minmod(\vartheta_j^{n+1(l)}, b\vartheta_{j+1}^{n+1(l)}) \\ &+ \frac{1+k}{2} \Delta x_j \minmod(\vartheta_{j+1}^{n+1(l)}, b\vartheta_j^{n+1(l)}) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} u_j &< 0 \\ \varphi_{j+1/2}^R &= \varphi_{j+1}^{n+1} \\ &- \frac{1-k}{2} \Delta x_{j+1} \minmod(\vartheta_{j+2}^{n+1(l)}, b\vartheta_{j+1}^{n+1(l)}) \\ &- \frac{1+k}{2} \Delta x_{j+1} \minmod(\vartheta_{j+1}^{n+1(l)}, b\vartheta_{j+2}^{n+1(l)}) \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 $n+1$ の変数は新しい時刻の変数を示しており、未知数である。一方、 $n+1(l)$ の変数は新しい時刻の前反復の変数を示しており、既知の変数である。 l は反復回数であるが、 $l=1$ の場合は $n+1(l)$ の変数として前時刻の値を用いる。

陰解法では、未知数である $n+1$ の変数を1次精度風上差分法で考慮して係数行列に組み込み、TVD法による保存量と1次精度風上差分法による保存量の差の移流を次のように求めて荷重項に組み込んで高精度化を図った。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} u_j &\geq 0 \\ \Delta \varphi_{j+1/2}^L u_j &= (\varphi_{j+1/2}^{L(l)} - \varphi_j^{n+1(l)}) u_j \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} u_j &< 0 \\ \Delta \varphi_{j+1/2}^R u_j &= (\varphi_{j+1/2}^{R(l)} - \varphi_{j+1}^{n+1(l)}) u_j \end{aligned} \quad (17)$$

なお、 $\varphi_{j+1/2}^{L(l)} [u_j \geq 0]$, $\varphi_{j+1/2}^{R(l)} [u_j < 0]$ は、式(16)と式(17)にある $n+1$ の未知数を $n+1(l)$ の既知の値に置き換えて求めたものである。

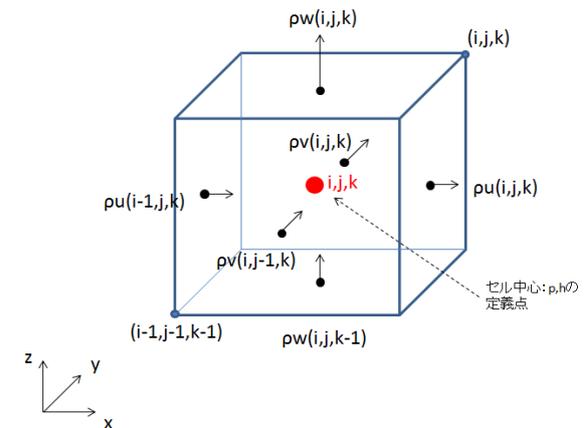
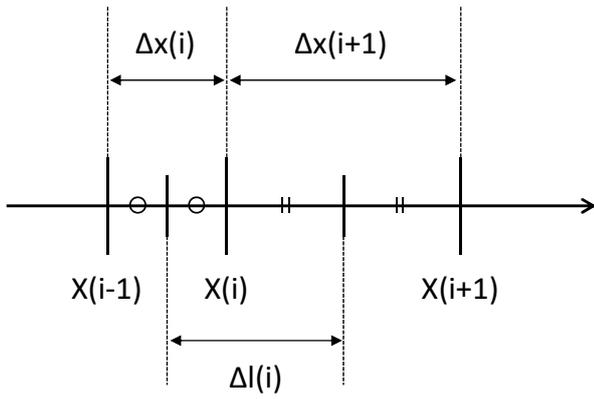


図2 座標系と変数位置 (流速は境界面、スカラー変数はセル中心)



読み替え

Y方向の場合: $Y(j), \Delta y(j), \Delta m(j)$
 Z方向の場合: $Z(k), \Delta z(k), \Delta n(k)$

図 3 不等間隔メッシュ時の座標値とメッシュ幅

2.4. 離散化式

2.4.1. エネルギー保存式

ECBA 法では、エネルギー保存式を基に圧力 Poisson 方程式を組み上げるため、エネルギー保存式を次のように変形する。なお、運動量保存式の基本変数は流速ではなく運動量束のため、対流項は運動量束を基に書き換えている。

$$\begin{aligned}
 & \gamma_v \frac{\partial E}{\partial t} + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial r^\alpha \gamma_r \left[\frac{E+p}{\rho}\right] \rho u}{\partial r} \\
 & + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial \gamma_\theta \left[\frac{E+p}{\rho}\right] \rho v}{\partial \theta} + \frac{\partial \gamma_z \left[\frac{E+p}{\rho}\right] \rho w}{\partial z} \\
 & = \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\alpha \gamma_r \lambda_e \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{E - KE}{\rho C_v} \right) \right) \\
 & + \left(\frac{1}{r^2}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\gamma_\theta \lambda_e \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{E - KE}{\rho C_v} \right) \right) \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_z \lambda_e \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E - KE}{\rho C_v} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{18}$$

また、計算安定化のため、次のように変形した式でも離散化して適用できるようにした。

$$\begin{aligned}
 & \gamma_v \frac{\partial E}{\partial t} + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial r^\alpha \gamma_r \left[\frac{E+p}{\rho}\right] \rho u}{\partial r} \\
 & + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial \gamma_\theta \left[\frac{E+p}{\rho}\right] \rho v}{\partial \theta} + \frac{\partial \gamma_z \left[\frac{E+p}{\rho}\right] \rho w}{\partial z} \\
 & = \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\alpha \gamma_r \left(\frac{\lambda_e T}{E} \right) \frac{\partial E}{\partial r} \right) \\
 & + \left(\frac{1}{r^2}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\gamma_\theta \left(\frac{\lambda_e T}{E} \right) \frac{\partial E}{\partial \theta} \right) \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_z \left(\frac{\lambda_e T}{E} \right) \frac{\partial E}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{19}$$

なお、以下では式(18)を基本として離散化式を示している。

エネルギー保存式の基本変数を圧力とするために次のように変形する。まず、全エネルギーを次のように置き換えて、エネルギー保存式の時間項と熱伝導項に代入する。

$$\begin{aligned}
 E & = \rho h - p + KE = (GZ - 1)p + KE \\
 & \because GZ = \rho h/p
 \end{aligned} \tag{20}$$

GZ は理想気体であれば、状態方程式から $\gamma/(\gamma - 1)/z$ で表されるが、実在流体も解析対象としているため、一般化して $\rho h/p$ と置き換えている。また、 KE は運動エネルギーを表し、対流項の運動量束が圧力に置き換えられるため、対流項の全エネルギーはそのままとした。

式(20)を式(18)の時間項と熱伝導項に代入すると、次の式(21)が得られる。このように整理することで、エネルギー保存式は圧力を基本変数として表すことができる。なお、離散化に当たっては、前時刻や前の反復回の変数については、例えば、 $[(GZ - 1)p + KE]^n$ や $[(GZ - 1)p + KE]^l$ としないで、 E^n または E^l としてそのまま用いるようにした。

本手法は熱伝導項が支配的な流れは得意としていない。そのような流れに対しては熱伝導項を先に解いてから圧力 Poisson 方程式を解く 2 段階の解法を適用できるようにしている。

$$\begin{aligned}
 & \gamma_v \frac{\partial [(GZ - 1)p + KE]}{\partial t} \\
 & + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial r^\alpha \gamma_r \left[\frac{E+p}{\rho}\right] \rho u}{\partial r} \\
 & + \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial \gamma_\theta \left[\frac{E+p}{\rho}\right] \rho v}{\partial \theta} + \frac{\partial \gamma_z \left[\frac{E+p}{\rho}\right] \rho w}{\partial z} \quad (21) \\
 & = \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\alpha \gamma_r \lambda_e \frac{\partial [(GZ - 1)p / \rho C_v]}{\partial r} \right) \\
 & + \left(\frac{1}{r^2}\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\gamma_\theta \lambda_e \frac{\partial [(GZ - 1)p / \rho C_v]}{\partial \theta} \right) \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_z \lambda_e \frac{\partial [(GZ - 1)p / \rho C_v]}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

圧力 Poisson 方程式の離散化式は次の通りとなり、 δp に関する連立一次方程式として解かれる。なお、下添え字 (i,j,k) のうち、特徴的なところはできるだけ残し、共通しているところは省略している。

2.4.2. 圧力 Poisson 方程式

次の式(22)から式(25)を式(21)に代入することで、圧力 Poisson 方程式が得られる。なお、上添え字の l は、新しい時刻における前の反復回を示している。

$$p^{n+1}_{i,j,k} = p^l_{i,j,k} + \delta p_{i,j,k} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 E^{n+1}_{i,j,k} &= [(GZ - 1)p + KE]^{n+1}_{i,j,k} \\
 &= (GZ - 1)^l_{i,j,k} (p^l_{i,j,k} + \delta p_{i,j,k}) + KE^l_{i,j,k} \quad (23) \\
 &= (GZ - 1)^l_{i,j,k} p^l_{i,j,k} + KE^l_{i,j,k} \\
 &\quad + (GZ - 1)^l_{i,j,k} \delta p_{i,j,k} \\
 &= E^l_{i,j,k} + (GZ - 1)^l_{i,j,k} \delta p_{i,j,k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho u^{n+1}_{i+1/2} &= \rho u^l_{i+1/2} + \delta \rho u_{i+1/2} \\
 \rho v^{n+1}_{j+1/2} &= \rho v^l_{j+1/2} + \delta \rho v_{j+1/2} \quad (24) \\
 \rho w^{n+1}_{k+1/2} &= \rho w^l_{k+1/2} + \delta \rho w_{k+1/2}
 \end{aligned}$$

ここで、運動量の補正項は SIMPLEC 法と同様の方法により次のように表される。

$$\begin{aligned}
 \delta \rho u_{i+1/2} &= -\frac{1}{(a^u_p + \sum a^u_{nb})_i} \frac{\delta p_{i+1} - \delta p_i}{\Delta l_i} \\
 \delta \rho v_{j+1/2} &= -\frac{1}{(a^v_p + \sum a^v_{nb})_j} \frac{\delta p_{j+1} - \delta p_j}{\Delta m_j} \quad (25) \\
 \delta \rho w_{k+1/2} &= -\frac{1}{(a^w_p + \sum a^w_{nb})_k} \frac{\delta p_{k+1} - \delta p_k}{\Delta n_k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_v (GZ_i^l - 1) \frac{\delta p_i}{\Delta t} \\
& - \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta x_i} \left[\begin{array}{l} (x^\alpha \gamma_x)_i < \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l >_i^x \left\{ \frac{1}{(a^u_p + \sum a^u_{nb})_i} \frac{\delta p_{i+1} - \delta p_i}{\Delta l_i} \right\} \\ - (x^\alpha \gamma_x)_{i-1} < \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l >_{i-1}^x \left\{ \frac{1}{(a^u_p + \sum a^u_{nb})_{i-1}} \frac{\delta p_i - \delta p_{i-1}}{\Delta l_{i-1}} \right\} \end{array} \right] \\
& - \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta y_j} \left[\begin{array}{l} (\gamma_y)_j < \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l >_j^y \left\{ \frac{1}{(a^v_p + \sum a^v_{nb})_j} \frac{\delta p_{j+1} - \delta p_j}{\Delta m_j} \right\} \\ - (\gamma_y)_{j-1} < \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l >_{j-1}^y \left\{ \frac{1}{(a^v_p + \sum a^v_{nb})_{j-1}} \frac{\delta p_j - \delta p_{j-1}}{\Delta m_{j-1}} \right\} \end{array} \right] \\
& - \frac{1}{\Delta z_k} \left[\begin{array}{l} (\gamma_z)_k < \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l >_k^z \left\{ \frac{1}{(a^w_p + \sum a^w_{nb})_k} \frac{\delta p_{k+1} - \delta p_k}{\Delta n_k} \right\} \\ - (\gamma_z)_{k-1} < \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l >_{k-1}^z \left\{ \frac{1}{(a^w_p + \sum a^w_{nb})_{k-1}} \frac{\delta p_k - \delta p_{k-1}}{\Delta n_{k-1}} \right\} \end{array} \right] \\
& - \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta x_i} \left[(x^\alpha \gamma_x)_i \left[\left(\frac{\lambda_e T}{E} \right)^l \right]_i \frac{(GZ-1)_{i+1}^l \delta p_{i+1} - (GZ-1)_i^l \delta p_i}{\Delta l_i} \right. \\
& \quad \left. - (x^\alpha \gamma_x)_{i-1} \left[\left(\frac{\lambda_e T}{E} \right)^l \right]_{i-1} \frac{(GZ-1)_i^l \delta p_i - (GZ-1)_{i-1}^l \delta p_{i-1}}{\Delta l_{i-1}} \right] \\
& - \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^{2\alpha} \frac{1}{\Delta y_j} \left[(\gamma_y)_j \left[\left(\frac{\lambda_e T}{E} \right)^l \right]_j \frac{(GZ-1)_{j+1}^l \delta p_{j+1} - (GZ-1)_j^l \delta p_j}{\Delta m_j} \right. \\
& \quad \left. - (\gamma_y)_{j-1} \left[\left(\frac{\lambda_e T}{E} \right)^l \right]_{j-1} \frac{(GZ-1)_j^l \delta p_j - (GZ-1)_{j-1}^l \delta p_{j-1}}{\Delta m_{j-1}} \right] \\
& - \frac{1}{\Delta z_k} \left[(\gamma_z)_k \left[\left(\frac{\lambda_e T}{E} \right)^l \right]_k \frac{(GZ-1)_{k+1}^l \delta p_{k+1} - (GZ-1)_k^l \delta p_k}{\Delta n_k} \right. \\
& \quad \left. - (\gamma_z)_{k-1} \left[\left(\frac{\lambda_e T}{E} \right)^l \right]_{k-1} \frac{(GZ-1)_k^l \delta p_k - (GZ-1)_{k-1}^l \delta p_{k-1}}{\Delta n_{k-1}} \right] \\
& = \gamma_v \frac{E_i^n}{\Delta t} - \gamma_v (GZ_i^l - 1) \frac{p_i^l + KE_i^l}{\Delta t} \\
& - \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta x_i} \left[(x^\alpha \gamma_x \rho u)_i < \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l >_i^x - (x^\alpha \gamma_x \rho u)_{i-1} < \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l >_{i-1}^x \right] \\
& - \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta y_j} \left[(\gamma_y \rho v)_j < \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l >_j^y - (\gamma_y \rho v)_{j-1} < \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l >_{j-1}^y \right] \\
& - \frac{1}{\Delta z_k} \left[(\gamma_z \rho w)_k < \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l >_k^z - (\gamma_z \rho w)_{k-1} < \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l >_{k-1}^z \right]
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta x_i} \left[(x^\alpha \gamma_x)_i [\lambda_e]_i \frac{\left(\frac{E}{\rho C_v} \right)_{i+1}^l - \left(\frac{E}{\rho C_v} \right)_i^l}{\Delta l_i} - (x^\alpha \gamma_x)_{i-1} [\lambda_e]_{i-1} \frac{\left(\frac{E}{\rho C_v} \right)_i^l - \left(\frac{E}{\rho C_v} \right)_{i-1}^l}{\Delta l_{i-1}} \right] \\
 & + \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^{2\alpha} \frac{1}{\Delta y_j} \left[(\gamma_y)_j [\lambda_e]_j \frac{\left(\frac{E}{\rho C_v} \right)_{j+1}^l - \left(\frac{E}{\rho C_v} \right)_j^l}{\Delta m_j} - (\gamma_y)_{j-1} [\lambda_e]_{j-1} \frac{\left(\frac{E}{\rho C_v} \right)_j^l - \left(\frac{E}{\rho C_v} \right)_{j-1}^l}{\Delta m_{j-1}} \right] \\
 & + \frac{1}{\Delta z_k} \left[(\gamma_z)_k [\lambda_e]_k \frac{\left(\frac{E}{\rho C_v} \right)_{k+1}^l - \left(\frac{E}{\rho C_v} \right)_k^l}{\Delta n_k} - (\gamma_z)_{k-1} [\lambda_e]_{k-1} \frac{\left(\frac{E}{\rho C_v} \right)_k^l - \left(\frac{E}{\rho C_v} \right)_{k-1}^l}{\Delta n_{k-1}} \right]
 \end{aligned}$$

なお、対流項に掛かる $[(E+p)/\rho]$ を前の反復回で評価している。これを次のように圧力修正量の項を新たに加えて新しい時刻として評価を試みた。しかしながら、この項を加えることで計算の収束性が多少悪化したため、 $[(E+p)/\rho]$ を前の反復回で評価することを基本とした。すなわち、式(27)の2番目の式の右辺の第1項と第2項のみを基本とした。

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^{n+1} & \cong \frac{E^{n+1} + p^{n+1}}{\rho^l} \\
 & = \frac{E^l + (GZ-1)^l \delta p + p^l + \delta p}{\rho^l} \\
 & = \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l + \frac{(GZ)^l \delta p}{\rho^l} \\
 \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^{n+1} (\rho u)^{n+1} & \cong \left\{ \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l + \frac{(GZ)^l \delta p}{\rho^l} \right\} \{ (\rho u)^l + \delta \rho u \} \\
 & \cong \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l (\rho u)^l + \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l \delta \rho u + \frac{(GZ)^l \delta p}{\rho^l} (\rho u)^l + \frac{(GZ)^l (\delta p)^l}{\rho^l} \delta \rho u
 \end{aligned} \tag{27}$$

項はすでにある項でその後のふたつの項を新たに加えた。 ρu は運動量ベクトルであり、 δp は未知数であるが、 $\delta \rho u$ には未知数 δp を含んでいるため、 $(\delta p)^l$ は前の反復回の値を用いるようにした。なお、第4項があると収束性は多少良い場合がある。

エネルギー保存式の対流項の離散化方法に対する計算の収束性と安定性はいくつかの事例計算から次の順番となることが分かった。

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} & \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l (\rho u)^l + \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l \delta \rho u \\
 \textcircled{2} & \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l (\rho u)^l + \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l \delta \rho u + \frac{(GZ)^l (\delta p)^l}{\rho^l} \delta \rho u \\
 \textcircled{3} & \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l (\rho u)^l + \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l \delta \rho u + \frac{(GZ)^l \delta p}{\rho^l} (\rho u)^l + \frac{(GZ)^l (\delta p)^l}{\rho^l} \delta \rho u \\
 \textcircled{4} & \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l (\rho u)^l + \left[\frac{E+p}{\rho} \right]^l \delta \rho u + \frac{(GZ)^l \delta p}{\rho^l} (\rho u)^l
 \end{aligned} \tag{28}$$

ここで、式(27)の2番目の式の右辺の第1項と第2

2.4.3. 質量保存式

本式は、 ρ に関する連立一次方程式として解かれる。

$$\begin{aligned}
& \gamma_v \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} \\
& + \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta x_i} [(x^\alpha \gamma_x u^{n+1})_i \\
& \quad < \rho^{n+1} >_i^x - (x^\alpha \gamma_x u^{n+1})_{i-1} \\
& \quad < \rho^{n+1} >_{i-1}^x] \\
& + \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta y_j} [(\gamma_y v^{n+1})_j \\
& \quad < \rho^{n+1} >_j^y - (\gamma_y v^{n+1})_{j-1} \\
& \quad < \rho^{n+1} >_{j-1}^y] \\
& + \frac{1}{\Delta z_k} [(\gamma_z w^{n+1})_k < \rho >_k^z - (\gamma_z w^{n+1})_{k-1} \\
& \quad < \rho^{n+1} >_{k-1}^z] = \Gamma
\end{aligned} \tag{29}$$

2.4.4. 運動量保存式

(1) x 方向成分

本式は、 ρu に関する連立一次方程式として解かれる。なお、 ρv 、 ρw は新しい時刻の前反復の値が用いられる。

$$\begin{aligned}
& [\gamma_v] \frac{1}{\Delta t} [(\rho u)_i^{n+1} - (\rho u)_i^n] + \left(\frac{1}{x_i} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta l_i} [[x^\alpha \gamma_x u]_{i+1}^x < \rho u >_{i+1}^x - [x^\alpha \gamma_x u]_i^x < \rho u >_i^x] \\
& + \left(\frac{1}{x_i} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta y_j} [[\gamma_y v]_j^x < \rho u >_j^y - [\gamma_y v]_{j-1}^x < \rho u >_{j-1}^y] - \frac{\alpha}{x_i} [\gamma_v] \left(\frac{[\rho v]_j^x + [\rho v]_{j-1}^x}{2} \right) \left(\frac{[v]_j^x + [v]_{j-1}^x}{2} \right) \\
& + \frac{1}{\Delta z_k} [[\gamma_z w]_k^x < \rho u >_k^z - [\gamma_z w]_{k-1}^x < \rho u >_{k-1}^z] = -[\gamma_v] \frac{1}{\Delta l_i} [(p)_{i+1} - (p)_i] \\
& + \left(\frac{1}{x_i} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta l_i} \left[\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)^\alpha [\gamma_x]_{i+1} \frac{(\mu_e)_{i+1}}{(\rho)_{i+1}} 2 \frac{(\rho u)_{i+1} - (\rho u)_i}{\Delta x_{i+1}} \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right)^\alpha [\gamma_x]_i \frac{(\mu_e)_i}{(\rho)_i} 2 \frac{(\rho u)_i - (\rho u)_{i-1}}{\Delta x_i} \right] \\
& + \left(\frac{1}{x_i} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta y_j} \left[[\gamma_y]_j^x \frac{[\mu_e]_j^{yx}}{[\rho]_j^{yx}} \left\{ \left(\frac{1}{x_i} \right)^\alpha \frac{(\rho u)_{j+1} - (\rho u)_j}{\Delta m_j} + \frac{(\rho v)_{i+1} - (\rho v)_i}{\Delta l_i} - \alpha \frac{[\rho v]_j^x}{x_i} \right\} \right. \\
& \quad \left. - [\gamma_y]_{j-1}^x \frac{[\mu_e]_{j-1}^{yx}}{[\rho]_{j-1}^{yx}} \left\{ \left(\frac{1}{x_i} \right)^\alpha \frac{(\rho u)_j - (\rho u)_{j-1}}{\Delta m_{j-1}} + \frac{(\rho v)_{i+1,j-1} - (\rho v)_{j-1}}{\Delta l_i} - \alpha \frac{[\rho v]_{j-1}^x}{x_i} \right\} \right] \\
& + \frac{1}{\Delta z_k} \left[[\gamma_z]_k^x \frac{[\mu_e]_k^{zx}}{[\rho]_k^{zx}} \left\{ \frac{(\rho u)_{k+1} - (\rho u)_k}{\Delta n_k} + \frac{(\rho w)_{i+1} - (\rho w)_i}{\Delta l_i} \right\} \right. \\
& \quad \left. - [\gamma_z]_{k-1}^x \frac{[\mu_e]_{k-1}^{zx}}{[\rho]_{k-1}^{zx}} \left\{ \frac{(\rho u)_k - (\rho u)_{k-1}}{\Delta n_{k-1}} + \frac{(\rho w)_{i+1,k-1} - (\rho w)_{k-1}}{\Delta l_i} \right\} \right]
\end{aligned} \tag{30}$$

(2) y 方向成分

本式は、 ρv に関する連立一次方程式として解かれる。なお、 ρu 、 ρw は新しい時刻の前反復の値が用いられる。

$$\begin{aligned}
& [\gamma_v] \frac{1}{\Delta t} [(\rho v)_j^{n+1} - (\rho v)_j^n] + \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta x_i} [[x^\alpha \gamma_x u]_i^y < \rho v >_i^x - [x^\alpha \gamma_x u]_{i-1}^y < \rho v >_{i-1}^x] \\
& + \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta m_j} [[\gamma_y v]_{j+1}^y < \rho v >_{j+1}^y - [\gamma_y v]_j^y < \rho v >_j^y] - \frac{\alpha [\gamma_v]}{x_i} (\rho v)_j \left(\frac{[u]_j^y + [u]_{j-1}^y}{2} \right) \\
& + \frac{1}{\Delta z_k} [[\gamma_z w]_k^y < \rho v >_k^z - [\gamma_z w]_{k-1}^z < \rho v >_{k-1}^z] \\
& = -[\gamma_v] \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta m_j} [(p)_{j+1} - (p)_j] \\
& + \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta x_i} \left[\begin{aligned} & [\gamma_x]_i^y \frac{[\mu_e]_i^{xy}}{[\rho]_i^{xy}} \left\{ \frac{(\rho v)_{i+1} - (\rho v)_i}{\Delta l_i} + \left(\frac{1}{x_i} \right)^\alpha \frac{(\rho u)_{j+1} - (\rho u)_j}{\Delta m_j} - \alpha \frac{[\rho v]_i^x}{x_i} \right\} - \\ & [\gamma_x]_{i-1}^y \frac{[\mu_e]_{i-1}^{xy}}{[\rho]_{i-1}^{xy}} \left\{ \frac{(\rho v)_i - (\rho v)_{i-1}}{\Delta l_{i-1}} + \left(\frac{1}{x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{(\rho u)_{i-1,j+1} - (\rho u)_{i-1}}{\Delta m_j} - \alpha \frac{[\rho v]_{i-1}^x}{x_{i-1}} \right\} \end{aligned} \right] \quad (31) \\
& + \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{1}{\Delta m_j} \left[\begin{aligned} & \{ \gamma_y \}_{j+1} \frac{(\mu_e)_{j+1}}{(\rho)_{j+1}} 2 \left\{ \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{(\rho v)_{j+1} - (\rho v)_j}{\Delta y_{j+1}} + \alpha \frac{(\rho u)_{j+1} + (\rho u)_{i-1,j+1}}{x_i + x_{i-1}} \right\} \\ & - \{ \gamma_y \}_j \frac{(\mu_e)_j}{(\rho)_j} 2 \left\{ \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{(\rho v)_j - (\rho v)_{j-1}}{\Delta y_j} + \alpha \frac{(\rho u)_j + (\rho u)_{i-1,j}}{x_i + x_{i-1}} \right\} \end{aligned} \right] \\
& + \alpha \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}} \right) (\gamma_y)_j \frac{[\mu_e]_j^y}{[\rho]_j^y} \left[\frac{[\rho v]_j^x - [\rho v]_{j-1}^x}{\Delta x_i} + \frac{\{\rho u\}_{j+1}^x - \{\rho u\}_j^x}{\Delta m_j} - \frac{2(\rho v)_j}{x_i + x_{i-1}} \right] \\
& + \frac{1}{\Delta z_k} \left[\begin{aligned} & [\gamma_z]_k^y \frac{[\mu_e]_k^{zy}}{[\rho]_k^{zy}} \left\{ \frac{(\rho v)_{k+1} - (\rho v)_k}{\Delta n_k} + \left(\frac{1}{x_i} \right)^\alpha \frac{(\rho w)_{j+1} - (\rho w)_j}{\Delta m_i} \right\} \\ & - [\gamma_z]_{k-1}^y \frac{[\mu_e]_{k-1}^{zy}}{[\rho]_{k-1}^{zy}} \left\{ \frac{(\rho v)_k - (\rho v)_{k-1}}{\Delta n_{k-1}} + \left(\frac{1}{x_{i-1}} \right)^\alpha \frac{(\rho w)_{j+1,k-1} - (\rho w)_{k-1}}{\Delta m_i} \right\} \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

(3) z 方向成分

本式は、 ρw に関する連立一次方程式として解かれる。なお、 ρu 、 ρv は新しい時刻の前反復の値が用いられる。

$$\begin{aligned}
 & [\gamma_v] \frac{1}{\Delta t} [(\rho w)_k^{n+1} - (\rho w)_k^n] \\
 & + \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}}\right)^\alpha \frac{1}{\Delta x_i} [[x^\alpha \gamma_x u]_i^z < \rho w >_i^x - [x^\alpha \gamma_x u]_{i-1}^z < \rho w >_{i-1}^x] \\
 & + \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}}\right)^\alpha \frac{1}{\Delta y_j} [[\gamma_y v]_j^z < \rho w >_j^y - [\gamma_y v]_{j-1}^z < \rho w >_{j-1}^y] \\
 & + \frac{1}{\Delta n_k} [[\gamma_z w]_{k+1}^z < \rho w >_{k+1}^z - [\gamma_z w]_k^z < \rho w >_k^z] \\
 & = -[\gamma_v] \frac{1}{\Delta n_k} [(p)_{k+1} - (p)_k] \\
 & + \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}}\right)^\alpha \frac{1}{\Delta x_i} \left[\begin{aligned} & (x_i)^\alpha [\gamma_x]_i^z \frac{[\mu_e]_i^{xz}}{[\rho]_i^{xz}} \left\{ \frac{(\rho w)_{i+1} - (\rho w)_i}{\Delta l_i} + \frac{(\rho u)_{k+1} - (\rho u)_k}{\Delta n_k} \right\} \\ & - (x_{i-1})^\alpha [\gamma_x]_{i-1}^z \frac{[\mu_e]_{i-1}^{xz}}{[\rho]_{i-1}^{xz}} \left\{ \frac{(\rho w)_i - (\rho w)_{i-1}}{\Delta l_{i-1}} + \frac{(\rho u)_{i-1,k+1} - (\rho u)_{i-1}}{\Delta n_k} \right\} \end{aligned} \right] \tag{32} \\
 & + \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}}\right)^\alpha \frac{1}{\Delta y_j} \left[\begin{aligned} & [\gamma_y]_j^z \frac{[\mu_e]_j^{yz}}{[\rho]_j^{yz}} \left\{ \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}}\right)^\alpha \frac{(\rho w)_{j+1} - (\rho w)_j}{\Delta m_j} + \frac{(\rho v)_{k+1} - (\rho v)_k}{\Delta n_k} \right\} \\ & - [\gamma_y]_{j-1}^z \frac{[\mu_e]_{j-1}^{yz}}{[\rho]_{j-1}^{yz}} \left\{ \left(\frac{2}{x_i + x_{i-1}}\right)^\alpha \frac{(\rho w)_j - (\rho w)_{j-1}}{\Delta m_{j-1}} + \frac{(\rho v)_{j-1,k+1} - (\rho v)_{j-1,k}}{\Delta n_k} \right\} \end{aligned} \right] \\
 & + \frac{1}{\Delta n_k} \left[\begin{aligned} & [\gamma_z]_{k+1} \frac{(\mu_e)_{k+1}}{(\rho)_{k+1}} 2 \frac{(\rho w)_{k+1} - (\rho w)_k}{\Delta z_{k+1}} \\ & - [\gamma_z]_k \frac{(\mu_e)_k}{(\rho)_k} 2 \frac{(\rho w)_k - (\rho w)_{k-1}}{\Delta z_k} \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

3. 計算事例

ECBA 法の妥当性、適用性を確認するために、数種類の計算事例の解析検討を行った。本章ではこれら計算事例を紹介する。

度分布がやや鈍っているものの、Sod の厳密解[10]と良く一致した結果が得られている。また、いずれの分布図から衝撃波面を的確に捉えられていることが分かる。これらから、ECBA 法の圧縮性流体解析に対する適用性が確認できる。

3.1. 衝撃波管解析

衝撃波管を長さ 0.2m、1mm 四方の配管で模擬した。配管は空気で充満しているものとし、格子分割数を 200 とした。高压側配管(X<0)の初期値を、1.0MPa、800K とし、低压側配管(X>0)の初期値を 0.1MPa、300K とした。計算は 1.0x10⁻⁴秒まで行った。

本解析で得られた 1.0x10⁻⁴秒時点の計算結果を図 4 に示す。接触不連続面における密度分布や温

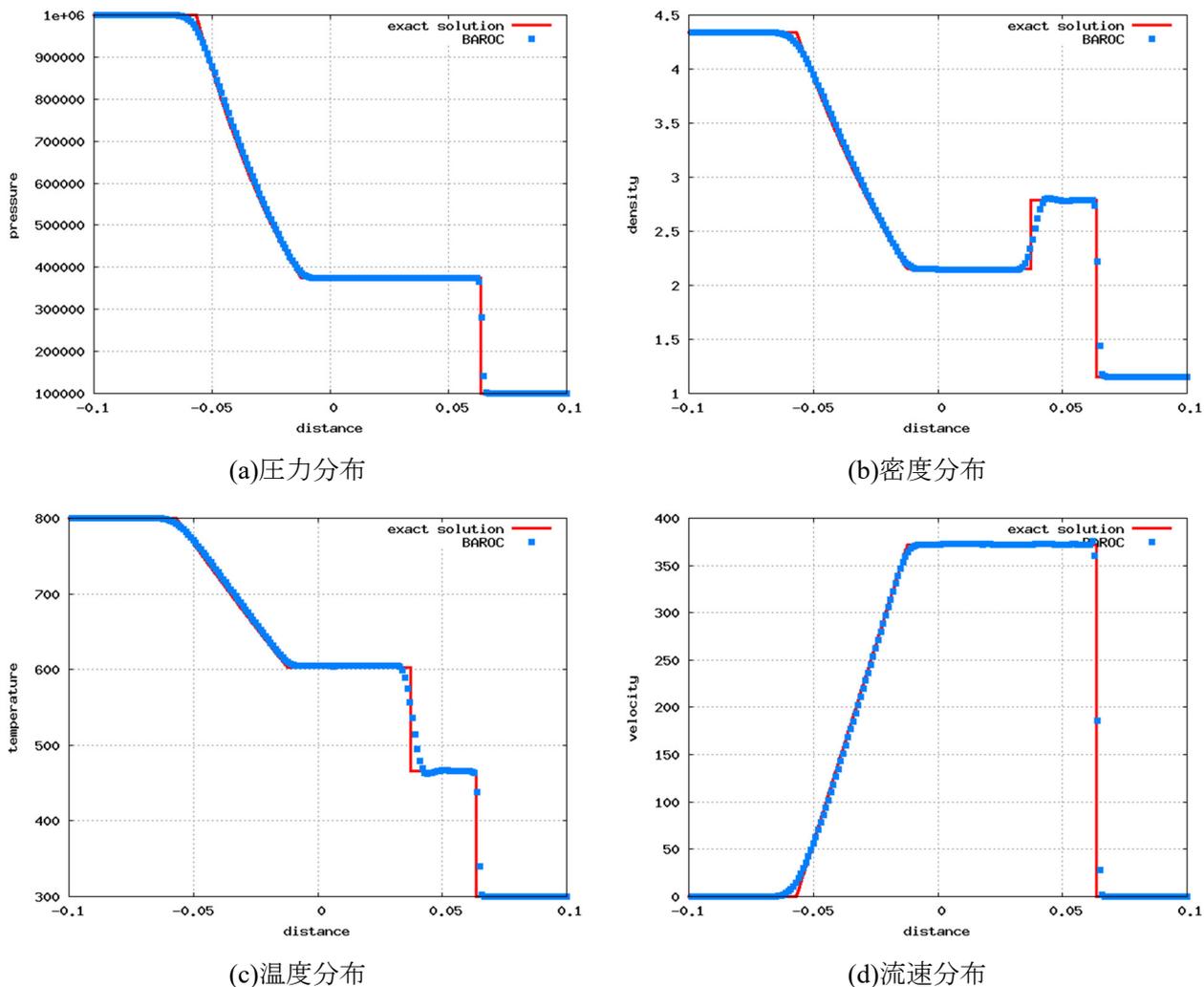


図 4 ECBA 法による衝撃波管解析

3.2. サーマルキャビテイ解析

自然対流の代表的な例題であるサーマルキャビテイ解析を行い、最も著名なベンチマーク解 [11] と比較し妥当性を検討した。

解析体系は 1m 四方の矩形とし、計算格子は 100 × 100 の格子分割とした。Prandtl 数 0.71、Rayleigh 数 1,000 として、加熱面(X=0m)の温度を 280K、冷却面(X=1m)の温度を 270K で固定した。

本解析で得られた温度分布を図 5 に示す。また、平均 Nusselt 数、水平方向と垂直方向の最大流速をベンチマーク解と比較したものを表 1 に示す。

平均 Nusselt 数は、加熱面と冷却面の温度差で無次元化した温度勾配を加熱面に沿って積分したものである。最大流速は高さと同温度拡散係数(熱伝導度と熱容量の比)で流速を無次元化したものであり、水平方向最大流速は垂直中央における最

大値であり、垂直方向最大流速は水平中央における最大値である。

本計算結果はベンチマーク解と比較して、2%以下の差異に収まっており、本計算の妥当性が確認できる。なお、圧縮性を考慮しているため、密度は 1.28kg/m³ から 1.33kg/m³ の範囲で分布している。

以上から、ECBA 法の自然対流に対する適用性が確認できる。

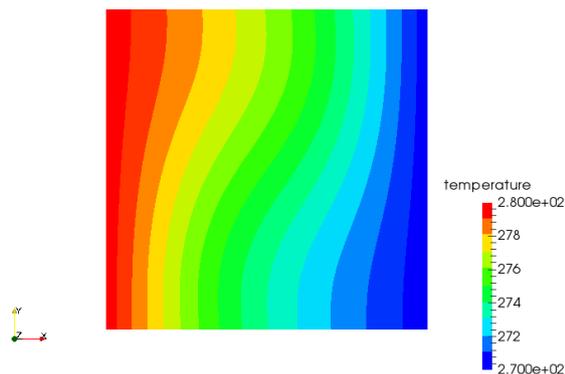


図 5 サーマルキャビテイ解析 (温度分布)

表 1 主要物理量のベンチマーク解との比較

No.	項目	本計算	ベンチマーク解[11]
1	平均 Nusselt 数	1.140(+1.97%)	1.118
2	水平方向最大流速	3.608(-1.12%)	3.649
3	垂直方向最大流速	3.683(-0.38%)	3.697

(注)カッコ内の数値はベンチマーク解との差異

3.3. 密度差の大きい流れ解析

密度差の大きい流れ解析として、配管内の空気が水に置き換わる例題を取り上げた。本解析のイメージを図 6 に示す。

配管の長さを 100m とし、1,000 分割とした。配管は空気で満たされており、流速 2m/s で水が流入して徐々に水に置き換わる様子を計算で検討した。本計算は、2 成分均質一流体二相流を対象としており、空気と水の物性は圧力と温度に依存する NIST/REFPROP[6]の实在流体の物性を用い、出口圧力は大気圧で開放とし、温度 300K での等温計算とした。なお、エネルギー保存式を解いているため、等温計算でありながら、全エネルギー、内部エネルギー、エンタルピーは変化する。

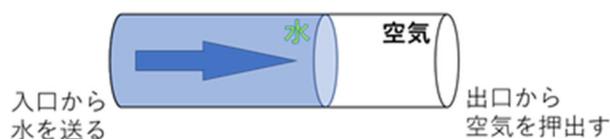


図 6 密度差の大きい流れ解析イメージ

計算結果を図 7 に示す。細線が水の体積率で、太線が密度である。なお、細線と太線はほぼ重なっている。また、水の密度が 1,000kg/m³、空気の密度が 1.2kg/m³ くらいのため、空気しか存在しないところでは、ゼロに近いところでプロットされている。

水の流速が 2m/s のため、水と空気の界面は 10 秒間で 20m 移動することになる。このグラフから、時間が経つごとに水が出口に向かって水の移動速度に応じて置き換わっていることが分かる。ただし、空気の圧縮性の影響で出口に向かうほど、水の移動が遅れる傾向が示されている。

以上から、ECBA 法が密度差の大きい流れへの適用性が確認できる。なお、SIMPLE 系列の圧縮性流体解析では、水の運動量そのまま空気に伝わってしまうため、流速がとても速くなって適切な計算を行うことが困難である。

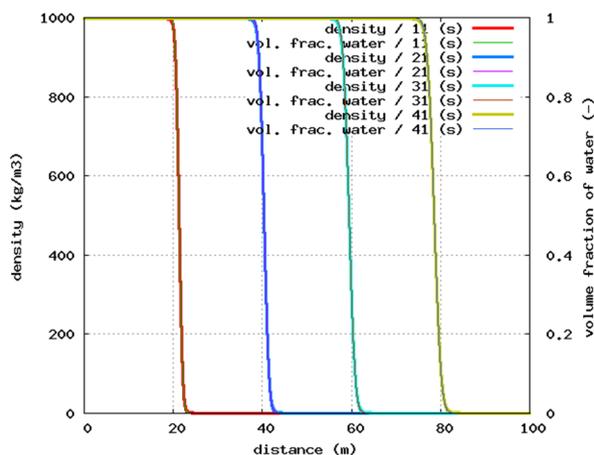


図 7 密度差の大きい流れ解析 (空気と水の置換)

3.4. 実規模建屋内自然対流解析

原子炉建屋規模の建物内の自然対流解析を行い、ECBA 法の適用性を検討した。建物の大きさを 60m×60m×22.4m、格子数を 120×120×50=720,000 格子、四方の壁面は断熱とし、空気の

初期温度を 298.15K、床面と天井面の温度を 298.15K、床面の中央高温部 398.15K として自然対流を模擬した。本計算の解析モデルを図 8 に示す。

得られた計算結果として、1,000 秒時点の中央断面の温度分布を図 9 に示す。中央部分高温部から発生した気流が天井に衝突して周りに分散していく様子が窺われる。なお、1,000 秒時点では時間刻み幅 115 秒、最大 Courant 数 1,183 である。

参考用に当社の流体解析ソフトウェア Advance/FroneFlow/red (以下、AFFr と呼ぶ)を用いて同じ条件で解析を実施した計算結果を図 10 に示した。ECBA 法による計算結果は AFFr による計算結果と同等であり、ECBA 法の自然対流解析への適用性が確認できる。

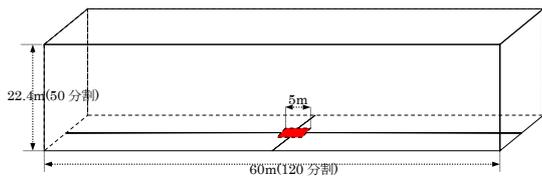


図 8 自然対流解析モデル

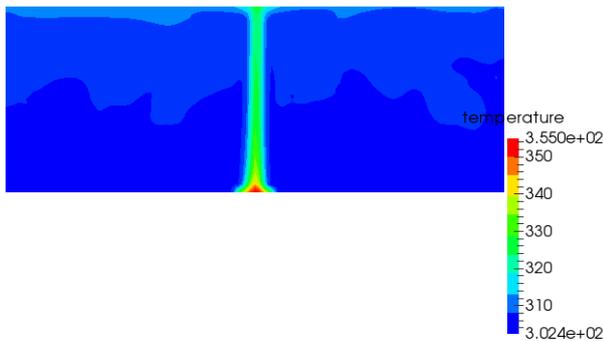


図 9 1,000 秒での中央断面温度分布(ECBA 法)

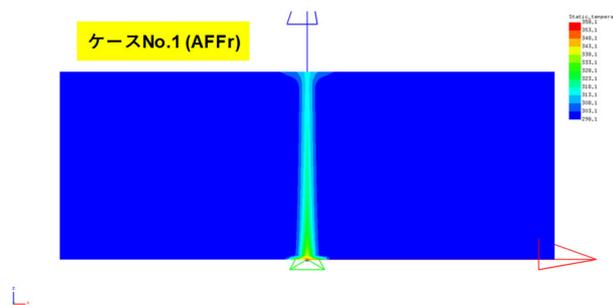


図 10 1,000 秒での中央断面温度分布 (AFFr、参考用)

3.5. 実規模建屋内圧力上昇解析

前節と同様の原子炉建屋規模の建物内に空気が流入し続けたときの圧力上昇解析を行い、ECBA 法の適用性を検討した。前節の解析と同様に建物の大きさを 60m×60m×22.4m、格子数を 120×120×50=720,000 格子とし、すべての壁面は断熱とし、空気の初期温度を 298.15K、中央下部の 2 か所から空気の流入量 100.0kg/s、流入温度 398.15K 相当のエネルギーを与えて圧力上昇の解析を行った。本計算の解析モデルを図 11 に示す。

得られた計算結果として、1,000 秒時点の中央断面の温度分布を図 12 に示す。中央下部の 2 か所から流入した高温の空気が天井に向かって衝突して周りに分散していく様子が窺われる。なお、1,000 秒時点では時間刻み幅 50 秒、最大 Courant 数 750 である。

管路系の圧縮性流体解析を主な目的とする当社の管路系流体解析ソフトウェア Advance/FroneNet/Γ (以下、FroneNet/Γ と呼ぶ)を用いて同じ条件で解析を実施して得られた圧力変化と ECBA 法により得られた圧力変化を比較したものを図 13 に示す。これにより、ECBA 法による計算結果はこの計算結果と一致しており、ECBA 法の圧力上昇解析への適用性が確認できる。

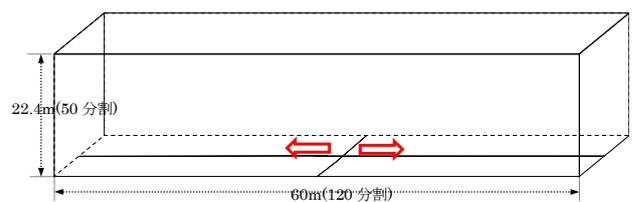


図 11 圧力上昇解析モデル

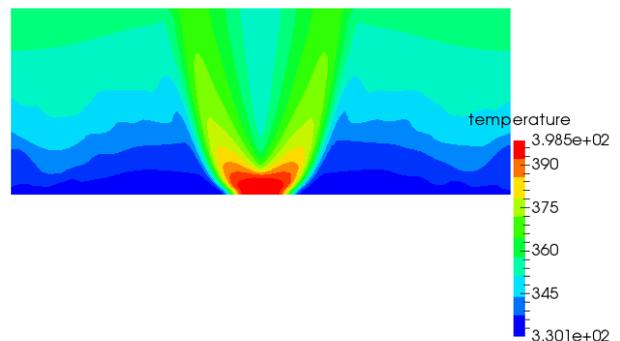


図 12 1,000 秒での中央断面温度分布(ECBA 法)

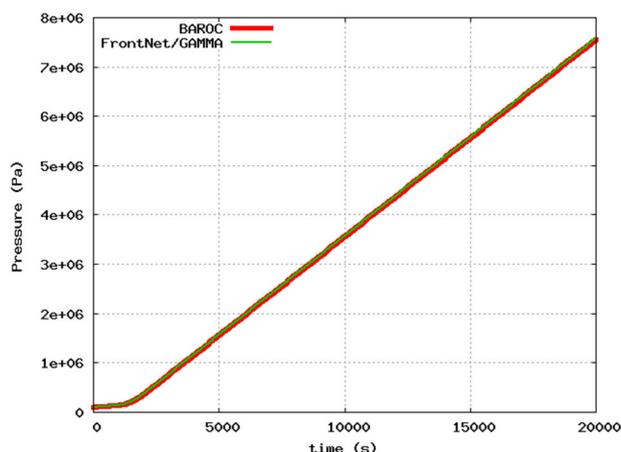


図 13 平均圧力変化 (FrontNet/Γ との比較)

4. まとめ

本稿で取り上げた ECBA 法は、アドバンスソフトが開発している管路系流体解析ソフトウェア Advance/FroneNet/Γ と格納容器/原子炉建屋熱流動解析コード BAROC に実装し、SIMPLE 法系列の解法では困難な圧力、流速、エネルギーが強く結びつく流れや密度差の大きい流れなどの流体計算で能力を発揮している。しかしながら、計算条件によっては計算そのものが厳しいことがあり、計算速度や計算安定性の面で改善する余地がある。

ECBA 法は開発したばかりの研究段階の方法であるため、今後も計算精度、計算速度、計算安定性の向上に努めてより良い数値解法としていきたい。また、実測に基づく詳細な検証計算はまだ実施していないので、今後の課題として取り組んでいきたい。

参考文献

- [1] Patankar, S.V., " Numerical Heat Transfer and Fluid Flow ", Hemisphere (1970).
- [2] van Doormaal, J. P. and Raithby, G. D., "Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows", Numerical Heat Transfer. vol 7, pp. 147-163, (1984).
- [3] Stewart and Rowe, "Advanced Continuous Fluid Eulerian Computation Scheme for Flows with

Large Density Gradients", ANS Transactions, Vol.24, 178 (1976).

- [4] Peng, D. Y, and Robinson, D. B., "The characterization of the heptanes and heavier fractions for the GPA Peng-Robinson programs", Gas Processors Association (1978).
- [5] Soave, G., "Equilibrium constants from a modified Redkh-Kwong equation of state"; Chemical Engineering Science, Vol.27 (1972) 1197-1203.
- [6] NIST Reference Fluid Thermodynamic and Transport Properties Database (REFPROP), <https://www.nist.gov/srd/refprop>
- [7] van der Vorst, H. A., "Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems", SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, . 13(2) (1992) 631-644.
- [8] Chakravarthy, S.R., Osher, S., "High resolution applications of the Osher upwind scheme for the Euler equations", Proc. AIAA 6th Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA Paper 83-1943 (1983) 363-373.
- [9] 藤岡奨, "高精度界面捕捉法の開発と気液混相流数値計算への応用", 京都大学 (2013).
- [10] Sod, G. A., "A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws", J. Comput. Phys. 27 (1978) 1-3.
- [11] de Vahl Davis, G., "Natural convection of air in a square cavity: A benchmark numerical solution", Int. J. Numer. Methods Fluids, 3 (1983) 249-254.

※ 技術情報誌アドバンスシミュレーションは、アドバンスソフト株式会社 ホームページのシミュレーション図書館から、PDF ファイルがダウンロードできます。(ダウンロードしていただくには、アドバンス/シミュレーションフォーラム会員登録が必要です。)